

[II]

(公式) 楕円  $Ax^2 + By^2 = 1$  上の点  $(x_0, y_0)$  における接線の方程式は  $Ax_0x + By_0y = 1$

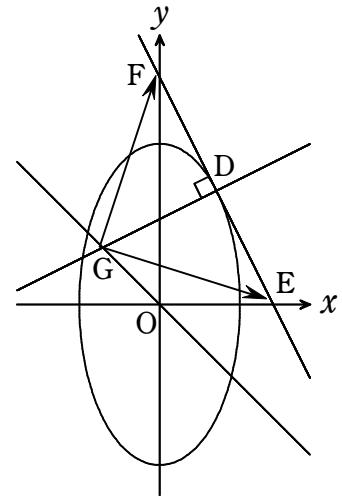
点  $(x_0, y_0)$  を通り直線  $Ax + By + C = 0$  に垂直な直線は  $B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0$

(1) 楕円  $C: \frac{k^2}{2}x^2 + \frac{1}{2k^2}y^2 = 1$  の概形は右図

点  $D\left(\frac{1}{k}, k\right)$  における  $C$  の接線の方程式は

$$\frac{k^2}{2} \cdot \frac{1}{k}x + \frac{1}{2k^2} \cdot ky = 1 \quad \text{すなわち} \quad k^2x + y = 2k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

これから  $E\left(\frac{2}{k}, 0\right), F(0, 2k) \dots\dots(\text{答}) \rightarrow D$  は  $EF$  の中点



(2) 点  $D$  における  $C$  の法線は、 $D$  を通り  $\textcircled{1}$  に垂直だから

$$\left(x - \frac{1}{k}\right) - k^2(y - k) = 0 \quad \text{すなわち} \quad x - k^2y = \frac{1 - k^4}{k}$$

これと  $y = -x$  を連立して解くと

$$x = -\frac{k^2 - 1}{k}, \quad y = \frac{k^2 - 1}{k} \quad \text{すなわち} \quad G\left(-\frac{k^2 - 1}{k}, \frac{k^2 - 1}{k}\right) \quad \dots\dots(\text{答})$$

また  $\vec{GE} = \left(\frac{k^2 + 1}{k}, -\frac{k^2 - 1}{k}\right), \vec{GF} = \left(\frac{k^2 - 1}{k}, \frac{k^2 + 1}{k}\right)$

$\rightarrow$  成分から  $\vec{GF}$  は  $\vec{GE}$  を  $\frac{\pi}{2}$  回転したものとわかる

$$\vec{GE} \cdot \vec{GF} = 0 \quad \text{だから} \quad \angle EGF = \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3)  $GE = GF = \sqrt{\left(\frac{k^2 + 1}{k}\right)^2 + \left(\frac{k^2 - 1}{k}\right)^2} = \frac{\sqrt{2(k^4 + 1)}}{k}$  から  $S = \frac{1}{2}GE \cdot GF = \frac{k^4 + 1}{k^2}$

また  $T = \frac{1}{2}OE \cdot OF = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k} \cdot 2k = 2$

$S = \sqrt{2}T$  のとき  $\frac{k^4 + 1}{k^2} = 2\sqrt{2}$  から  $k^4 - 2\sqrt{2}k^2 + 1 = 0$

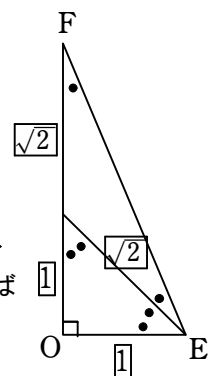
$k^2 > 1$  だから  $k^2 = 1 + \sqrt{2} \dots\dots(\text{答})$

$\angle OEF = \theta$  とおくと  $\tan \theta = \frac{OF}{OE} = k^2 = 1 + \sqrt{2}$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{1 - (1 + \sqrt{2})^2} = -1$$

$0 < 2\theta < \pi$  だから  $2\theta = \frac{3\pi}{4}$  ゆえに  $\theta = \angle OEF = \frac{3\pi}{8} \dots\dots(\text{答})$

$\rightarrow$  この図を知っていれば 答はわかる



(参考)

$\triangle GEF$  は直角二等辺三角形,  $D$  は直角三角形  $GEF, OEF$  の斜辺の中点だから  $DE = DO = DG = DF$

$$\triangle GEF : \triangle OEF = GD : OH = \sqrt{2} : 1$$

$\triangle OHD$  は直角二等辺三角形,  $\angle ODE = \frac{\pi}{4}, \angle DOE = \angle DEO = \frac{3\pi}{8}$

