

九点円の定理

図のように、 $\triangle ABC$  において、各辺の中点を  $D, E, F$ 、各頂点から対辺に下した垂線の足を  $H_A, H_B, H_C$ 、垂心  $H$  と各頂点を結ぶ線分の midpoint を  $M_A, M_B, M_C$  とする。このとき、9点  $D, E, F, H_A, H_B, H_C, M_A, M_B, M_C$  は同一円周上にある。この円（九点円）の中心は線分  $EF$  の midpoint  $N$  で半径は  $R/2$  である。ただし、 $\triangle ABC$  の外接円の中心を  $O$ 、半径を  $R$  とする。

証明

四角形  $AEH_AF$  において、線分  $EF$  の垂直二等分線は  $AN$  を通るから

$$AE = AF \quad \dots \textcircled{1}$$

次に、四角形  $AEH_AF$  が平行四辺形であることを示す。  
 $\triangle ABC$ 、 $\triangle H_AH_BH_C$  において、 $D, E, F$  は辺の midpoint であるから

また  $EF \parallel BC$ 、  
 これらより、四角形  $AEH_AF$  は

であるから平行四辺形であり、四角形  $AEH_AF$  は

より平行四辺形、よって四角形  $AEH_AF$  も平行四辺形となる。 $N$  は  $EF$  の midpoint であるから

$$AN \perp EF \quad \dots \textcircled{2}$$

また、四角形  $AEH_AF$  は  $AE = AF$ 、 $AN \perp EF$  であるから平行四辺形であり

$$AN = NF \quad \dots \textcircled{3}$$

①、②、③より

同様にして

となり、定理が証明された。

(証明終)

