

## アポロニウスの円

2 定点 A, B からの距離の比  $AP : BP$  が一定 (ただし  $AP \neq BP$ ) であるように点 P が動くときその軌跡は円になる。これをアポロニウスの円という。

$AP : BP = m : n$  ( $m \neq n$ ) とし、線分 AB を  $m : n$  の比に内分する点を C, 外分する点を D とするとき、線分 CD を直径とする円がアポロニウスの円である。

### 証明

$P(x, y)$ ,  $A(a, 0)$ ,  $B(b, 0)$ ,  $C(c, 0)$ ,  
 $D(d, 0)$  とすると

$$c = \frac{na + mb}{m + n}, \quad d = \frac{-na + mb}{m - n}$$

$AP : BP = m : n$  から  $m^2 BP^2 = n^2 AP^2$

$$m^2 \{(x - b)^2 + y^2\} = n^2 \{(x - a)^2 + y^2\}$$

$$(m^2 - n^2)x^2 + 2(n^2a - m^2b)x - n^2a^2 + m^2b^2 + (m^2 - n^2)y^2 = 0$$

$m \neq n$  から

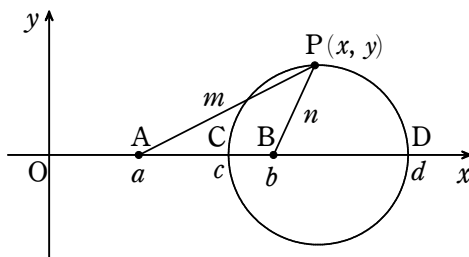
$$x^2 - 2 \cdot \frac{-n^2a + m^2b}{m^2 - n^2} x + \frac{-n^2a^2 + m^2b^2}{m^2 - n^2} + y^2 = 0 \quad \dots\dots ①$$

ここで  $c + d = 2 \cdot \frac{-n^2a + m^2b}{m^2 - n^2}$ ,  $cd = \frac{-n^2a^2 + m^2b^2}{m^2 - n^2}$  であるから ① は

$$x^2 - (c + d)x + cd + y^2 = 0 \quad \text{から} \quad (x - c)(x - d) + y^2 = 0 \quad \dots\dots ②$$

② は線分 CD を直径とする円を表す。

(証明終)



$\overrightarrow{CP} = (x - c, y)$ ,  $\overrightarrow{DP} = (x - d, y)$  であるから ② は

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DP} = 0$$

すなわち  $\overrightarrow{CP} = \vec{0}$  または  $\overrightarrow{DP} = \vec{0}$  または  $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{DP}$  であるから、P は CD を直径とする円上にある。また ② は次のように変形できる。

$$\left(x - \frac{c + d}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c + d}{2}\right)^2 - cd \quad \text{よって} \quad \left(x - \frac{c + d}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c - d}{2}\right)^2$$

すなわち、CD の中点が中心、 $\frac{CD}{2}$  が半径である。