

問題 xy 平面上の 2 点を $A(1, 0)$, $B(2, 0)$ とし, 直線 l を $y=mx$ ($m \neq 0$) とする。

(1) $AP+BP$ が最小となる直線 l 上の点 P の x 座標, y 座標を m で表せ。

(2) m が変化するとき, 点 P の描く図形を求めよ。

(1995 大阪教育大)

解 l に関して A と対称な点を A' , 線分 $A'B$ と l の交点を P とすると $AP+BP=A'P+BP$ であり, A', P, B は同一直線上にあるから, この点 P が $AP+BP$ を最小とする点である。

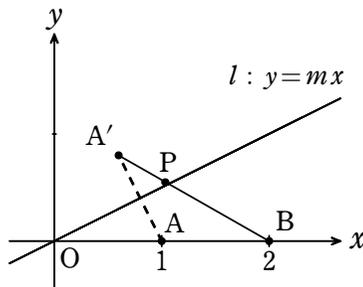
(1) $A'(a, b)$ とすると $A'A \perp l$ であるから

$$\frac{b}{a-1} = -\frac{1}{m} \quad \text{すなわち} \quad a = -mb + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$A'A$ の中点が l 上にあるから

$$\frac{b}{2} = m \cdot \frac{a+1}{2} \quad \text{すなわち} \quad b = m(a+1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ② から $a = \frac{-m^2+1}{m^2+1}, \quad b = \frac{2m}{m^2+1}$



直線 $A'B$ の方程式は

$$y = \frac{b}{a-2}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{2m}{m^2+1}(x-2) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$A'B$ と l の交点の座標は ③ と $y=mx$ を連立して解いて

$$x = \frac{4}{3(m^2+1)}, \quad y = \frac{4m}{3(m^2+1)} \quad \text{すなわち} \quad P\left(\frac{4}{3(m^2+1)}, \frac{4m}{3(m^2+1)}\right)$$

(2) $\frac{3x}{4} = \frac{1}{m^2+1}, \quad \frac{3y}{4} = \frac{m}{m^2+1}$

ここで $\left(\frac{1}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{m}{m^2+1}\right)^2 = \frac{1}{m^2+1}$ を用いると

$$\left(\frac{3x}{4}\right)^2 + \left(\frac{3y}{4}\right)^2 = \frac{3x}{4} \quad \text{から} \quad x^2 + y^2 = \frac{4x}{3}, \quad \text{また} \quad m \neq 0 \quad \text{から} \quad y \neq 0$$

したがって, 求める図形は x 軸上の 2 点を除く円である。

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}, \quad y \neq 0$$

補足 l に関して B と対称な点を B' とする。 $\triangle OAA'$, $\triangle OBB'$ は相似な二等辺三角形であるから

$$PA : PB = AA' : BB' = OA : OB = 1 : 2$$

となり, P と A, B からの距離の比が一定になる。

よって, P は円 (アポロニウスの円) の周上にある。

