

問題 1 辺の長さが  $a$  である正方形  $ABCD$  の対角線の交点  $O$  を中心として、この正方形をその平面内で  $\theta$  ( $0 < \theta < 90^\circ$ ) 回転したものを  $A'B'C'D'$  とする。はじめの正方形とあとの正方形との共通部分の面積  $T$  を求めよ。また  $\theta$  を変化させるとき、 $T$  の最小値を求めよ。  
(1960 京都大)

解答 図のように交点  $P, Q, R, S, U$  をとる。  $\triangle ROA \cong \triangle RSA'$  から

$$\angle RSA' = \angle ROA = \theta$$

$\triangle OAR$  と  $\triangle OA'P$  について、2 角とその間の辺がそれぞれ等しいから

$$\triangle OAR \cong \triangle OA'P$$

これから  $OP = OR$ ,  $\angle OPQ = \angle ORQ$  を用いると

$$\triangle QPA \cong \triangle QRA'$$

同様にして  $\triangle SUB \cong \triangle SRA'$

ここで

$$AQ = A'Q = QS \sin \theta, \quad SB = SA' = QS \cos \theta$$

を用いると  $AQ + QS + SB = a$  から

$$QS \sin \theta + QS + QS \cos \theta = a$$

$$\text{よって } QS = \frac{a}{\sin \theta + \cos \theta + 1}$$

面積について

$$\triangle OPQ = \triangle ORQ, \quad \triangle ORS = \triangle OUS \quad \text{から}$$

$$\text{五角形 } OPQSU = 2 \times \triangle OQS = 2 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot QS = \frac{a}{2} \cdot QS$$

したがって

$$T = 4 \times \frac{a}{2} \cdot QS = \frac{2a^2}{\sin \theta + \cos \theta + 1} = \frac{2a^2}{\sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ) + 1}$$

$T$  が最小となるのは分母が最大となる  $\theta = 45^\circ$  のときで、最小値は

$$\frac{2a^2}{\sqrt{2} + 1} = 2(\sqrt{2} - 1)a^2$$

