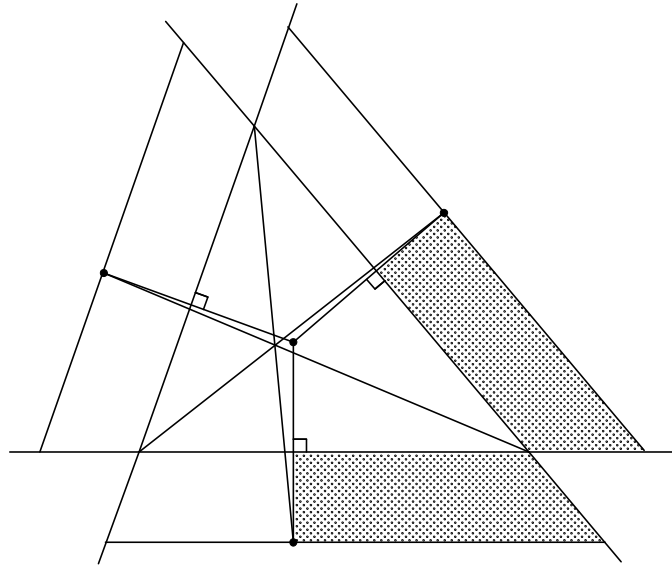


定理 $\triangle ABC$ において内心 I から辺 BC, CA, AB に垂線をひき、その上にそれぞれ点 D, E, F をとる。このとき、直線 AD, BE, CF は点で交わる。



証明 内接円と辺 BC, CA, AB との接点を D, E, F とし、 I を通る辺 BC の平行線と直線 AD, BE との交点を G, H とする。同様に図のように、 I を通る辺 CA の平行線をひき交点 J, K, L をとる。

台形 $BCDE, CAEF, ABFD$ において、

$DE \parallel BC, EF \parallel CA, FD \parallel AB$ であるから 台形 $BCDE$ 台形 $CAEF$ よって

$$\frac{DE}{BC} = \frac{IE}{ID} \quad \text{同様にして} \quad \frac{EF}{CA} = \frac{IF}{IE} \quad \dots\dots ①$$

次に、直線 AD, BE と GH との交点を M, N とする。 $\triangle ABC$ において I は内心であるから

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

同様に $\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{BA}, \frac{AF}{FB} = \frac{CA}{CB} \quad \dots\dots ②$

したがって、①, ②により

$$\frac{BM}{MN} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{DE}{BC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IE}{ID} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IF}{IE} = \frac{AF}{FB} = \frac{CN}{NM}$$

チェバの定理の逆により、直線 AD, BE, CF は点で交わる。 証明終