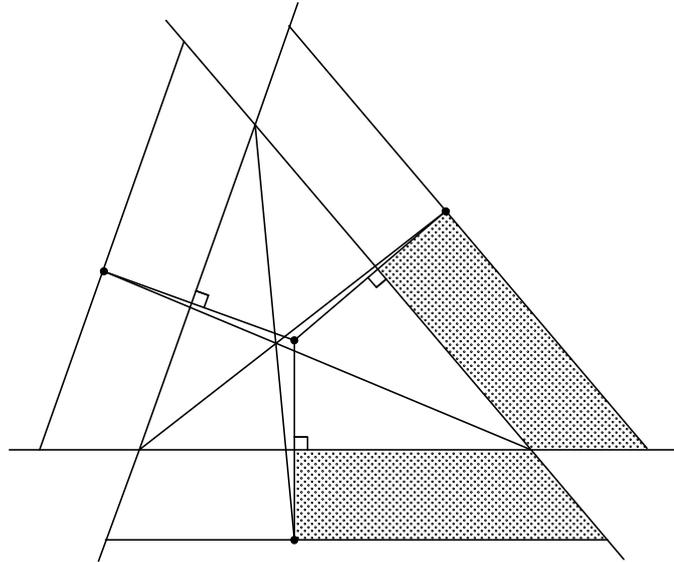


定理 $\triangle ABC$ において内心 I から辺 BC , CA , AB に垂線をひき, その上にそれぞれ点 D , E , F を $AD \perp BC$, $BE \perp CA$, $CF \perp AB$ となるようにとる。このとき, 直線 AD , BE , CF は 点 I で交わる。



証明 内接円と 辺 BC , CA , AB との接点を D' , E' , F' とし, AD' を通る辺 BC の平行線と直線 AD , BE との交点を G , H とする。同様に図のように BE' を通る辺 CA の平行線をひき交点 I , J , K をとる。

台形 $AD'GD'$, $BE'HE'$ において,

$\frac{AD'}{GD'} = \frac{AD}{DH}$, $\frac{BE'}{HE'} = \frac{BE}{EI}$
 であるから 台形 $AD'GD'$ 台形 $BE'HE'$ よって

$$\frac{AD'}{GD'} = \frac{BE'}{HE'} \quad \dots\dots ①$$

次に, 直線 AD , BE と BC , CA との交点を L , M とする。

$\triangle ADL$ において $AD \parallel BE$ であるから

$$\frac{AD}{BE} = \frac{LD}{EM}$$

同様に $\frac{BE}{CF} = \frac{ME}{FL}$, $\frac{CF}{AD} = \frac{FL}{LD}$ $\dots\dots ②$

したがって, ①, ② により

$$\frac{AD}{BE} = \frac{LD}{EM} = \frac{LD}{FL} \cdot \frac{FL}{EM} = \frac{AD}{CF} \cdot \frac{FL}{EM}$$

$$= \frac{AD}{CF} \cdot \frac{FL}{EM}$$

チェバの定理の逆により, 直線 AD , BE , CF は 点 I で交わる。 証明終