

デザルグの定理

2つの三角形の対応する頂点を結ぶ3直線が1点で交わる時、対応する3組の辺の3つの交点は1直線上にある。逆も成り立つ。

証明

$\triangle ABC$  と  $\triangle A'B'C'$  において、直線  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  が1点  $O$  で交わり、また、辺  $BC$  と  $B'C'$ ,  $CA$  と  $C'A'$ ,  $AB$  と  $A'B'$  がそれぞれ点  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  で交わるものとする。

$\triangle OBC$  を  $B'C'$  で切ったとみてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{OB'}{BC'} \cdot \frac{C'O}{OC} \cdot \frac{CO}{OB} = 1$$

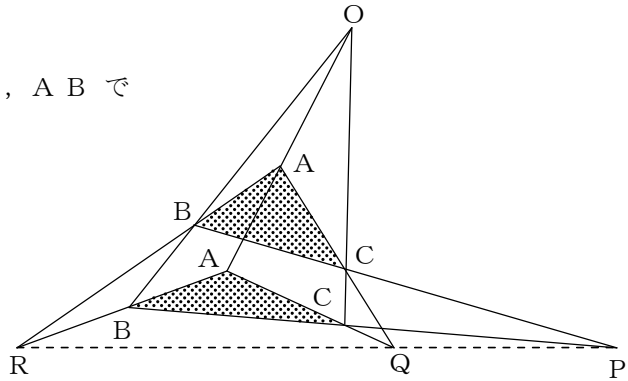
同様に、 $\triangle OCA$ ,  $\triangle OAC$  をそれぞれ  $C'A'$ ,  $A'B'$  で切ったとみると

$$\frac{OC'}{CA'} \cdot \frac{A'O}{OA} \cdot \frac{AO}{OC} = 1$$

$$\frac{OA'}{AB'} \cdot \frac{B'O}{OB} \cdot \frac{BO}{OA} = 1$$

これら3式をかけあわせると

$$\frac{OB'}{BC'} \cdot \frac{C'O}{OC} \cdot \frac{CO}{OB} \cdot \frac{OC'}{CA'} \cdot \frac{A'O}{OA} \cdot \frac{AO}{OC} \cdot \frac{OA'}{AB'} \cdot \frac{B'O}{OB} \cdot \frac{BO}{OA} = 1$$



したがって、点  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  は1直線上にある。

逆は、点  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  が1直線上にあるとき、直線  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  が1点で交わることを示せばよい。そのために、 $BB'$ ,  $CC'$  の交点を  $O$  として  $O, A, A'$  が1直線上にあることを示す。

$\triangle RBB'$  と  $\triangle RCC'$  において、対応する頂点を結ぶ3直線  $RQ$ ,  $BC$ ,  $B'C'$  は点  $P$  で交わるから、対応する3組の辺  $BB'$  と  $CC'$ ,  $RB$  と  $RC'$ ,  $RB'$  と  $RC$  の交点  $O, A, A'$  は1直線上にあることになる。  
(証明終)