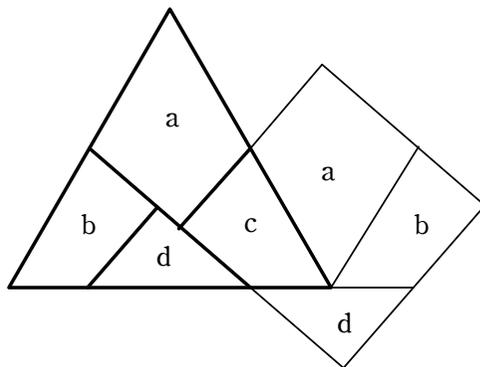


## 正三角形から正方形へ

正三角形を図のように切って並べかえ、正方形にすることができる。

この分割は、イギリスのパズル作家、数学者であるヘンリー・アーネスト・デュードニー(1857~1930)による。



### 分割方法

正三角形 ABC の一辺の長さを 1 とすると、その面積は  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  であるから、正方形の一辺

の長さ  $a$  は  $a = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$  である。

$\triangle ABC$  の 2 辺 AB, AC の中点をそれぞれ D, E とし, CD の延長上に点 F を  $DF = \frac{1}{2}$  となるようにとる。CF の中点を G とすると

$$GF = \frac{\sqrt{3}+1}{4}, \quad GC = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

BA の延長上に点 H を  $GH = GF$  となるようにとると

$$\begin{aligned} DH^2 &= GH^2 - GD^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \end{aligned}$$

BC 上に点 J を  $DJ = DH = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$  となるようにとると, DJ が正方形の一辺の長さ  $a$  に等しい。次に BJ 上に点 K を  $KJ = \frac{1}{2}$  となるようにとる。DJ に E, K から垂線を引き交点をそれぞれ L, M とする。

$\triangle DJE$  について, 底辺を  $DE = \frac{1}{2}$  とすると, 高さは  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  だから, 面積は  $\frac{\sqrt{3}}{16}$ ,

また  $\triangle DJE = \frac{1}{2} DJ \cdot EL$  だから  $\frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{2} EL$  よって  $EL = \frac{\sqrt[4]{3}}{4}$  となる。

$\triangle DKJ$  についても同様にして  $KM = \frac{\sqrt[4]{3}}{4}$ , すなわち  $EL = KM = \frac{a}{2}$  である。さらに

$\triangle DEL \cong \triangle JKM$  から  $DL = JM$  よって  $DM = JL$ ,  $DM + DL = a$ ,  $JL + JM = a$  がいえる。

