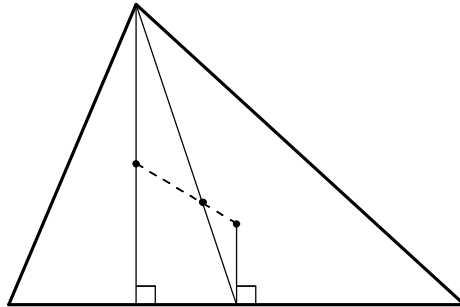


オイラー線

$\triangle ABC$ の外心 O 、重心 G 、垂心 H をそれぞれ O 、 G 、 H とするとき、この3点は1直線上にあり、点 G は線分 OH を $OG:GH=1:2$ の比に内分する。

3点 O 、 G 、 H を通る直線をオイラー線という。



証明

まず \vec{AD} 、 \vec{BE} 、 \vec{CF} で定義される点 H が垂心であることを示す。

点 O は外心であるから、 $|\vec{OA}|=|\vec{OB}|=|\vec{OC}|$ 。これらから
 $\vec{OA} \cdot \vec{BC} = \vec{OB} \cdot \vec{CA} = \vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0$
 よって

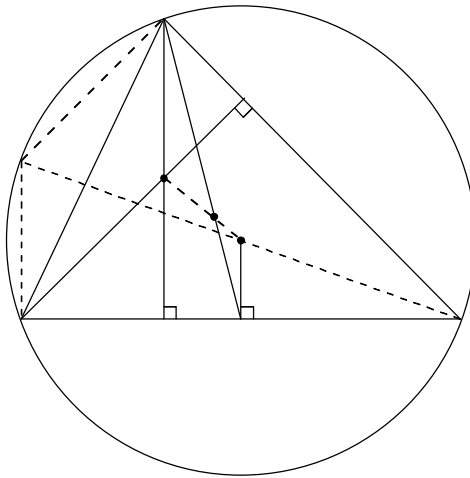
同様にして $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = \vec{BH} \cdot \vec{CA} = \vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$ となり、 $\triangle ABC$ の各頂点から対辺にひいた垂線は点 H を通る。すなわち、点 H は垂心である。

$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$
 また $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ であるから
 $\vec{OH} = 3\vec{OG}$

すなわち、3点 O 、 G 、 H は1直線上にあり、点 G は線分 OH を $OG:GH=1:2$ の比に内分する。
 (証明終)

補足

辺 BC の中点を M とすると $\vec{OM} \perp \vec{BC}$



証 明

$\triangle ABC$ の外接円 $\odot O$ の直径を AD とすると、
 $\angle ACD = 90^\circ$ より $CD \perp AB$ 同様にして
 $BE \perp AC$ は平行四辺形であるから
 DE の中点を F とすると、 $\triangle ABC$ において中点連結定理により
 $EF \parallel AB$ したがって $EF \perp CD$ 、
 中線 AD と BE の交点を G とすると、 $\triangle GEF \sim \triangle GDB$ で相似比が $1:2$ であるから
 $AG = 2GF$ は $\triangle ABC$ の重心 G に一致する。すなわち、 A, G, D は 直線上にある。

(証明終)