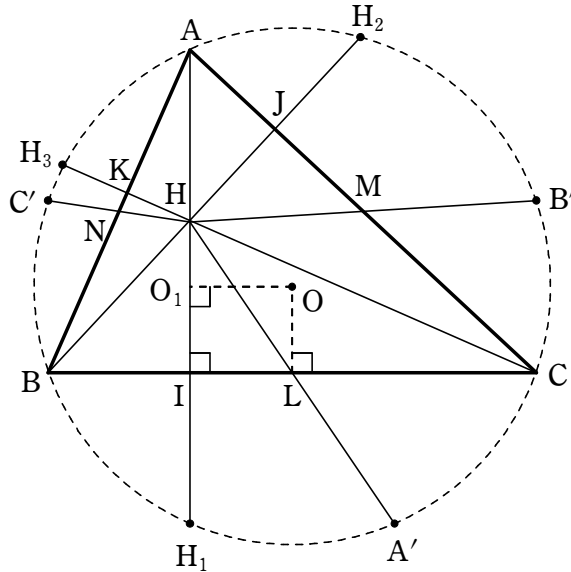


垂心の性質

$\triangle ABC$ の辺 BC , CA , AB の中点をそれぞれ L , M , N とする。また, $\triangle ABC$ の垂心を H , 外心を O , 外接円を S とする。このとき

- (i) 垂心 H の中点 L , M , N に関する対称点 A' , B' , C' は S 上にある。
- (ii) 垂心 H の辺 BC , CA , AB に関する対称点 H_1 , H_2 , H_3 は S 上にある。



証明

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad \text{より} \quad \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OL}$$

が成り立つ。(参照: オイラー線) H の L に関する対称点が A' であるから

$$\overrightarrow{LA'} = -\overrightarrow{LH} \quad \text{より} \quad \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OL} = -(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OL})$$

$$\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HO} = \overrightarrow{AO}$$

すなわち, A' は O に関する A の対称点であり, S 上にある。

同様に, H の M , N に関する対称点 B' , C' も S 上にある。

A から辺 BC におろした垂線の足を I , また, O から直線 AI におろした垂線の足を O_1 とする。

$$\overrightarrow{IH_1} = -\overrightarrow{IH} \quad \text{であるから} \quad \overrightarrow{O_1H_1} - \overrightarrow{O_1I} = -(\overrightarrow{O_1H} - \overrightarrow{O_1I})$$

$$\overrightarrow{O_1H_1} = 2\overrightarrow{O_1I} - \overrightarrow{O_1H}$$

ここで $2\overrightarrow{O_1I} = 2\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{AH}$ であるから

$$\overrightarrow{O_1H_1} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{O_1H} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HO_1} = \overrightarrow{AO_1}$$

すなわち, H_1 は O_1 に関する A の対称点であり, S は直線 OO_1 に関して対称だから, H_1 は S 上にある。同様に, H の辺 CA , AB に関する対称点 H_2 , H_3 も S 上にある。

(証明終)