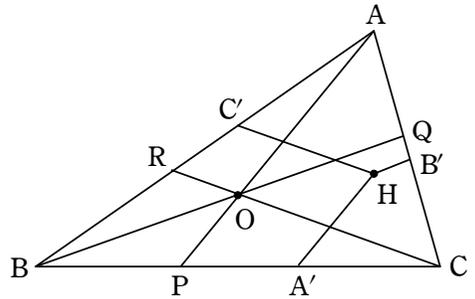


問題 鋭角三角形 ABC の外心を O とし、垂心を H とする。H を通りそれぞれ AO, BO, CO に平行にひいた直線と BC, CA, AB との交点を A', B', C' とすれば AA', BB', CC' は共点である。



証明 直線 AO, BO, CO と辺 BC, CA, AB との交点をそれぞれ P, Q, R とすると、まず

$$\begin{aligned} BP=CA', \quad CQ=AB', \quad AR=BC' \\ CP=BA', \quad AQ=CB', \quad BR=AC' \end{aligned} \quad \dots\dots ①$$

となることを示す。

△ABC の重心を G とすると、O, G, H は同一直線 (オイラー線) 上にあり、G は OH を 1 : 2 に内分する。AG と BC, HA' の交点をそれぞれ M, N とする。M は BC の中点であり、OM ⊥ BC から OM // AH であるから

$$\begin{aligned} \triangle GOM \sim \triangle GHA \\ GM : GA = GO : GH = 1 : 2 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

また仮定から AO // HN であるから

$$\begin{aligned} \triangle GOA \sim \triangle GHN \\ GA : GN = GO : GH = 1 : 2 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

②, ③ から

$$\begin{aligned} AG : GM : MN = 2 : 1 : 3 \\ \text{よって } MA = MN \end{aligned}$$

したがって 1 辺と両端の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle MAP \cong \triangle MNA' \quad \text{よって } MP = MA'$$

すなわち、P と A' は BC の中点 M に関して対称な位置にあるから BP = CA', CP = BA' が成り立つ。同様にして ① が成り立つ。

AP, BQ, CR は 1 点 O で交わるからチェバの定理により

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

① より $\frac{BP}{PC} = \frac{CA'}{A'B}$, $\frac{CQ}{QA} = \frac{AB'}{B'C}$, $\frac{AR}{RB} = \frac{BC'}{C'A}$ であるから

$$\frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{AB'}{B'C} = 1$$

チェバの定理の逆により AA', BB', CC' は 1 点で交わる。

(証明終)

