

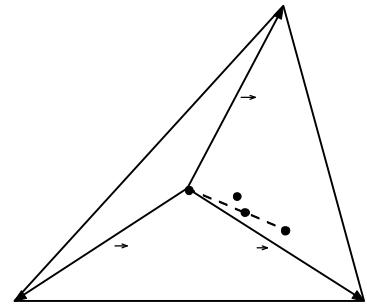
フオイエルバッハの定理

三角形の9点円はその内接円および傍接円に接する。

証明

準備, 利用する事項

$\triangle ABC$  の外心を  $O$ , 内心を  $I$ , 垂心を  $H$ , 辺の長さについて  $a, b, c$ ,  
外接円の半径を  $R$ , 内接円の半径を  $r$  とする。



とおき,  $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad S = \frac{1}{2}bc \sin A, \quad \text{これらから} \quad \dots\dots ①$$

また, ヘロンの公式から  $S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$  よって  $\dots\dots ②$

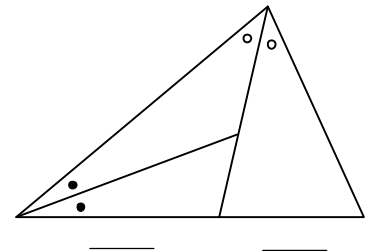
を基準の点とする  $A, B, C$  の位置ベクトルをそれぞれ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  とすると

$$|\vec{a}|^2 = a^2, \quad |\vec{b}|^2 = b^2, \quad |\vec{c}|^2 = c^2, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos C, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = ac \cos B, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = bc \cos A$$

$$\text{同様に} \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2, \quad \vec{b} \cdot \vec{b} = b^2, \quad \vec{c} \cdot \vec{c} = c^2 \quad \dots\dots ③$$

9点円の半径は  $\frac{R}{2}$  であり, その中心を  $N$  とすると,  $N$  は線分  $OH$  の中点であるから

$$\vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OH}) \quad \text{より} \quad \vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{O} + \vec{H})$$



9点円が内接円に接することの証明

$\triangle ABC$  の  $A$  の二等分線と辺  $BC$  との交点を  $D$  とすれば, 角の二等分線の性質から  $BD : DC = AB : AC$  となるから

$$\vec{BD} = \frac{c}{b+c} \vec{BC}, \quad \vec{CD} = \frac{b}{b+c} \vec{CB}$$

$$\vec{AD} = \frac{c}{b+c} \vec{AB} + \frac{b}{b+c} \vec{AC}$$

$$|\vec{AD}|^2 = \frac{1}{(b+c)^2} \{ c^2 |\vec{AB}|^2 + b^2 |\vec{AC}|^2 + 2bc \vec{AB} \cdot \vec{AC} \}$$

③を用いると

$$|\vec{AD}|^2 = \frac{1}{(b+c)^2} \{ c^2 a^2 + b^2 a^2 + 2bc ab \cos A \}$$

ここで第1項の  $\{ \}$  内の式は

第2項の  $\{ \}$  内の式は  $2ab \cos A = 2bc \sin B \sin C$  ……注

となるから, ①, ②を用いると

$$|\vec{r}| = \dots = \dots$$

したがって  $|\vec{r}| = \dots$  となり、これは9点円と内接円が内接することを示している。

### 9点円が傍接円に接することの証明

$\triangle$  の辺 に接する傍接円の半径を  $r$ 、中心を  $O$  とする。他の傍接円についても以下は同様である。

これと①、②より  $\dots$ 、  $\dots$

$$\vec{r} = \dots, \quad \vec{r} = \dots$$

$$|\vec{r}| = \dots \{ |\vec{r}| \dots \}$$

$\dots$

$\dots$

……注

$$= \dots + \dots$$

$$\dots + \dots = \dots + \dots = \dots$$

したがって  $|\vec{r}| = \dots$  となり、これは9点円と傍接円が外接することを示している。

注 まず  $\dots = \dots$

において、右辺第1項、第2項は  $\dots$  であるから

$$= \dots$$

また  $\dots = \dots$ 、  $\dots$ 、  $\dots$  を用いて

$$= \dots$$

注 第1項の  $\{ \}$  内の式は

第2項の  $\{ \}$  内の式は

$$,$$

を用いると