

問題 単位円に内接する正三角形 ABC の各頂点から x 軸に垂線 AA' , BB' , CC' をひく。

A , B が x 軸の上側, C が下側にあるとき, $AA'+BB'=CC'$ であることを証明せよ。

解 A の座標を $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ とすると,

$$B(\cos(\alpha + 120^\circ), \sin(\alpha + 120^\circ))$$

$$C(\cos(\alpha - 120^\circ), \sin(\alpha - 120^\circ))$$

ここで

$$\sin \alpha + \sin(\alpha + 120^\circ) + \sin(\alpha - 120^\circ)$$

$$= \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos 120^\circ$$

$$= \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

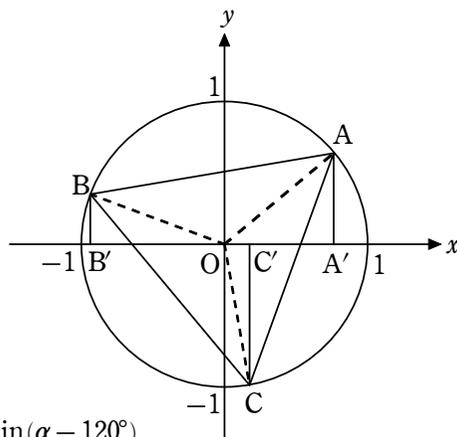
A , B が x 軸の上側, C が下側にあるとき

$$AA' = \sin \alpha, \quad BB' = \sin(\alpha + 120^\circ), \quad CC' = -\sin(\alpha - 120^\circ)$$

であるから

$$AA' + BB' - CC' = \sin \alpha + \sin(\alpha + 120^\circ) + \sin(\alpha - 120^\circ) = 0$$

したがって $AA' + BB' = CC'$



補足 $\cos \alpha + \cos(\alpha + 120^\circ) + \cos(\alpha - 120^\circ) = 0$

もいえるから, 各頂点から y 軸にひいた 3 つの垂線についても同様のことが成り立つ。

別解1 辺 AB の中点を M とすると, O は $\triangle ABC$ の重心だから

$$\vec{OC} = -2 \vec{OM} = -2 \times \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = -\vec{OA} - \vec{OB}$$

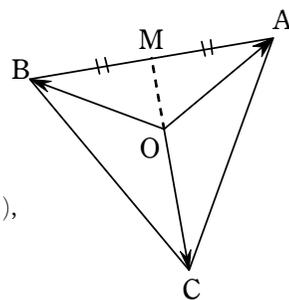
すなわち $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, 各ベクトルの成分は

$$\vec{OA} = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \vec{OB} = (\cos(\alpha + 120^\circ), \sin(\alpha + 120^\circ)),$$

$$\vec{OC} = (\cos(\alpha - 120^\circ), \sin(\alpha - 120^\circ))$$

であるから

$$\sin \alpha + \sin(\alpha + 120^\circ) + \sin(\alpha - 120^\circ) = 0 \quad (\text{以下同様})$$



別解2 辺 AB の中点 M から x 軸に垂線 MM' をひく。

O は $\triangle ABC$ の重心だから $CO : MO = CC' : MM' = 2 : 1$

$$CC' = 2 MM' = 2 \times \frac{AA' + BB'}{2} = AA' + BB'$$

