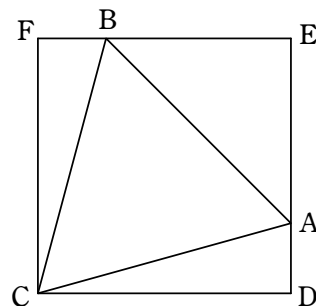


問題 長方形 CDEF の辺 DE, EF 上にそれぞれ点 A, B をとったところ, 三角形 ABC は正三角形になった。このとき

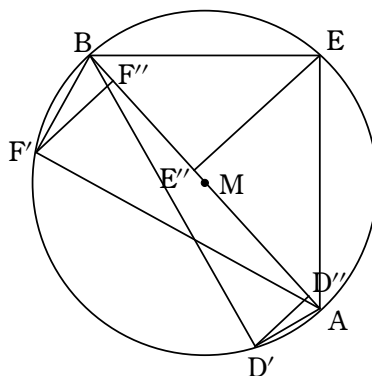
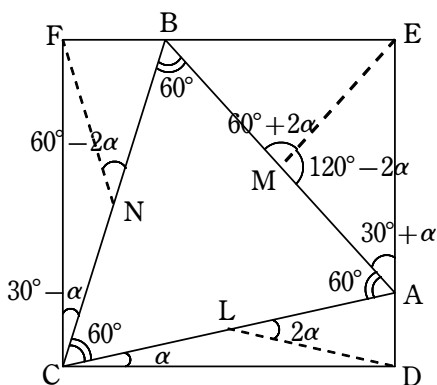
$$\triangle ACD + \triangle BFC = \triangle BAE$$

であることを示せ。



解 辺 CA, AB, BC の中点をそれぞれ L, M, N とし, $\angle ACD = \alpha$ とすると

$$\angle ALD = 2\alpha, \angle EMA = 120^\circ - 2\alpha, \angle EMB = 60^\circ + 2\alpha, \angle BNF = 60^\circ - 2\alpha$$



右図のように, $\triangle ACD$ を A のまわりで -60° だけ回転したものを $\triangle ABD'$, $\triangle BFC$ を B のまわりで 60° だけ回転したものを $\triangle BF'A$ とすると, 3 点 D', E, F' は, AB を直径とする円の周上にある。さらに

$$\angle EMD' = \angle EMA + \angle AMD' = (120^\circ - 2\alpha) + 2\alpha = 120^\circ,$$

$$\angle EMF' = \angle EMB + \angle BMF' = (60^\circ + 2\alpha) + (60^\circ - 2\alpha) = 120^\circ$$

であるから, $\triangle D'EF'$ は正三角形となる。

D', E, F' から AB に垂線 $D'D'', EE'', F'F''$ をひくと

$$D'D'' + F'F'' = EE''$$

が成り立つから

$$\triangle ABD' + \triangle BF'A = \triangle BAE \quad \text{すなわち} \quad \triangle ACD + \triangle BFC = \triangle BAE$$

である。

別解1 正三角形 ABC の1辺の長さを1として考えてよい。いま

$\angle ACD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$ とすると

$$\alpha + \beta = 30^\circ$$

$$AD = \sin \alpha, CD = \cos \alpha, BF = \sin \beta, CF = \cos \beta$$

であるから

$$2\triangle ACD + 2\triangle BFC - 2\triangle BAE$$

$$= AD \cdot CD + BF \cdot CF - BE \cdot AE$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta - (\cos \alpha - \sin \beta)(\cos \beta - \sin \alpha)$$

$$= 2(\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta) - (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

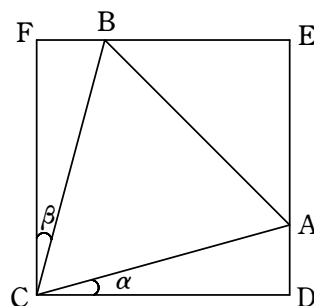
$$= \sin 2\alpha + \sin 2\beta - \cos(\alpha - \beta)$$

$$= \sin\{(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)\} + \sin\{(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)\} - \cos(\alpha - \beta)$$

$$= 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta)$$

$$= 2 \sin 30^\circ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta) = 0$$

したがって $\triangle ACD + \triangle BFC = \triangle BAE$ である。



別解2 正三角形 ABC の重心を原点 O とし、O から

各頂点までの距離を1として考える。各頂点の

座標を

$$A(\cos \alpha, \sin \alpha), B(\cos \beta, \sin \beta), C(\cos \gamma, \sin \gamma)$$

$$\text{ただし } \beta = \alpha + 120^\circ, \gamma = \alpha - 120^\circ$$

とすると

$$2\triangle ACD + 2\triangle BFC - 2\triangle BAE$$

$$= AD \cdot CD + CF \cdot BF - AE \cdot BE$$

$$= (\sin \alpha - \sin \gamma)(\cos \alpha - \cos \gamma)$$

$$+ (\sin \beta - \sin \gamma)(\cos \beta - \cos \gamma) - (\sin \beta - \sin \alpha)(\cos \alpha - \cos \beta)$$

$$= (2\sin \alpha - \sin \beta - \sin \gamma) \cos \alpha$$

$$+ (-\sin \alpha + 2\sin \beta - \sin \gamma) \cos \beta + (-\sin \alpha - \sin \beta + 2\sin \gamma) \cos \gamma$$

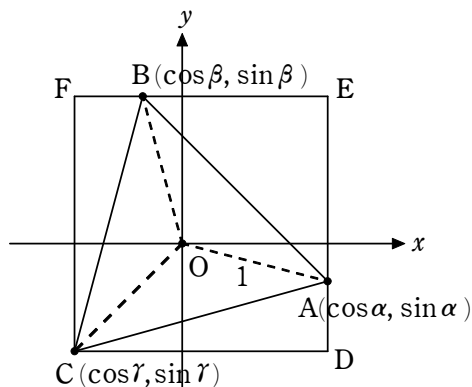
ここで $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \sin \alpha + \sin(\alpha + 120^\circ) + \sin(\alpha - 120^\circ) = 0$ を用いると

$$\text{与式} = 3\sin \alpha \cos \alpha + 3\sin \beta \cos \beta + 3\sin \gamma \cos \gamma$$

$$= \frac{3}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = \frac{3}{2}\{\sin 2\alpha + \sin(2\alpha + 240^\circ) + \sin(2\alpha - 240^\circ)\}$$

$$= \frac{3}{2}\{\sin 2\alpha + \sin(2\alpha - 120^\circ) + \sin(2\alpha + 120^\circ)\} = 0$$

したがって $\triangle ACD + \triangle BFC = \triangle BAE$ である。



別解3 AE=a, AD=c, BE=b, BF=d とおくと

仮定は AB=BC=CA すなわち AB²=BC²=CA² であるから

$$a^2+b^2=(a+c)^2+d^2=(b+d)^2+c^2 \dots\dots①$$

結論は △BFC+△ACD=△BAE であるから

$$\frac{1}{2}(a+c)d+\frac{1}{2}(b+d)c=\frac{1}{2}ab$$

すなわち (a+c)d+(b+d)c-ab=0 ……②

①の (a+c)²+d²=(b+d)²+c² を d について解くと

$$a^2+2ac=b^2+2bd \text{ から } d=\frac{a(a+2c)-b^2}{2b}$$

①の a²+b²=(a+c)²+d² から d を消去すると

$$a^2+b^2=(a+c)^2+\frac{\{a(a+2c)-b^2\}^2}{4b^2} \text{ から}$$

$$4(a^2+b^2)b^2=4(a+c)^2b^2+a^2(a+2c)^2-2a(a+2c)b^2+b^4$$

b について整理すると

$$a^2(a+2c)^2+(-2a^2+4ac+4c^2)b^2-3b^4=0$$

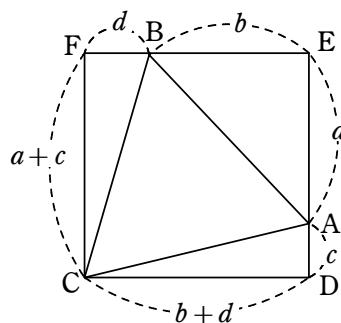
$$(a^2+b^2)\{(a+2c)^2-3b^2\}=0$$

a²+b²≠0 であるから (a+2c)²-3b²=0 ……③

結論 ② の左辺の d を消去すると

$$\begin{aligned} (a+c)d+(b+d)c-ab &= (a+2c)d-(a-c)b \\ &= \frac{1}{2b}\{a(a+2c)^2-(a+2c)b^2-2(a-c)b^2\} \\ &= \frac{a}{2b}\{(a+2c)^2-3b^2\} \end{aligned}$$

③を用いると (a+c)d+(b+d)c-ab=0 となるから、結論が示された。



補足 ③から a+2c=√3b となるから、CD に関して A と対称な点 A' をとると、∠BA'E=30° であることがわかります。

このことが問題の事実と関係があるかどうかはわかりませんが、もしご存知の方がおられましたら、ご教示をお願いします。

