

問題 双曲線 $y = \frac{1}{x}$ 上に点 P と、原点 O に関して P と対称な点 Q をとる。 P を中心とし Q を通る円は双曲線と Q 以外の共有点を 3 つもつこと、およびその 3 つの共有点を頂点とする三角形は正三角形となることを証明せよ。

証明 点 P は第 1 象限にあると考える。第 3 象限にある場合も同様である。 P の座標を $(p, \frac{1}{p})$ とすると、 $Q(-p, -\frac{1}{p})$ となる。 P を中心とし Q を通る円の方程式は

$$(x-p)^2 + (y-\frac{1}{p})^2 = 4(p^2 + \frac{1}{p^2})$$

これと $y = \frac{1}{x}$ から y を消去すると

$$x^4 - 2px^3 - 3(p^2 + \frac{1}{p^2})x^2 - \frac{2}{p}x + 1 = 0$$

$$(x+p)(x^3 - 3px^2 - \frac{3}{p^2}x + \frac{1}{p}) = 0$$

円と双曲線の Q 以外の共有点の x 座標は 3 次方程式

$$x^3 - 3px^2 - \frac{3}{p^2}x + \frac{1}{p} = 0 \quad \dots\dots ①$$

の実数解であるから、① が異なる 3 つの実数解をもつことを示せばよい。

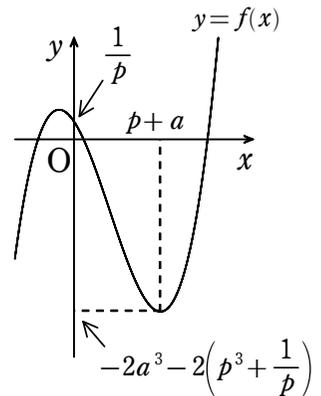
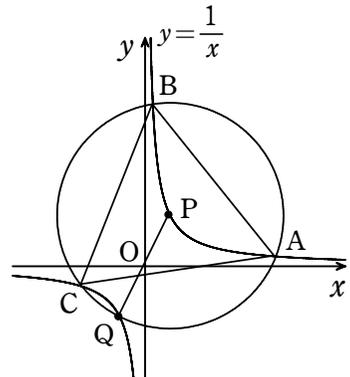
① の左辺を $f(x)$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - 6px - \frac{3}{p^2}$ から

$f'(x) = 0$ となるのは $x = p \pm a$ (ただし $a = \sqrt{p^2 + \frac{1}{p^2}}$) のとき

で $y = f(x)$ は極小値 $f(p+a) = -2a^3 - 2(p^3 + \frac{1}{p}) < 0$ をもつ。

したがって、 $y = f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 3 点で交わるから、

① は異なる 3 つの実数解 x_1, x_2, x_3 をもつ。



円と双曲線の 3 つの共有点は $A(x_1, \frac{1}{x_1}), B(x_2, \frac{1}{x_2}), C(x_3, \frac{1}{x_3})$

と表され、解と係数の関係から

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3p \quad \dots\dots ② \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -\frac{3}{p^2} \quad \dots\dots ③ \quad x_1x_2x_3 = -\frac{1}{p} \quad \dots\dots ④$$

$$②, ③ \div ④ \text{ から } \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = p, \quad \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = \frac{1}{p}$$

これから $\triangle ABC$ の重心は P に一致する。さらに P は $\triangle ABC$ の外接円の中心である。

すなわち、 $\triangle ABC$ は重心と外心が一致するから正三角形である。

(証明終)