

問題 放物線  $y=x^2$  ……① と、 $y$  軸上に中心  $A(0, a)$  ( $a \neq 0$ ) をもつ半径  $r(>0)$  の円

$$x^2 + (y-a)^2 = r^2 \quad \dots\dots②$$

とが接するとき、 $r$  を  $a$  を用いて表せ。

解答 ①、② から  $x$  を消去して整理すると

$$y^2 - (2a-1)y + a^2 - r^2 = 0 \quad \dots\dots③$$

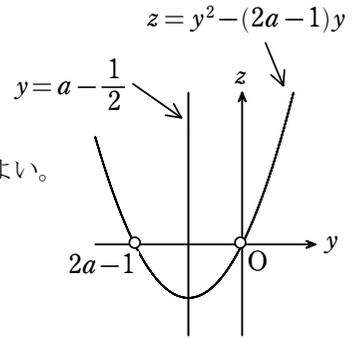
すなわち  $\left\{y - \left(a - \frac{1}{2}\right)\right\}^2 = -a + r^2 + \frac{1}{4} \quad \dots\dots③'$

(i) 放物線と円が原点で接する場合

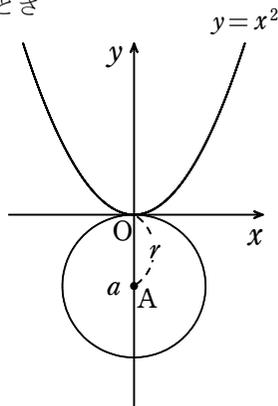
③ の解が  $y=0$  であり、他に  $y>0$  となる解をもたなければよい。

③ から  $|a|=r$  かつ  $2a-1 \leq 0$  すなわち

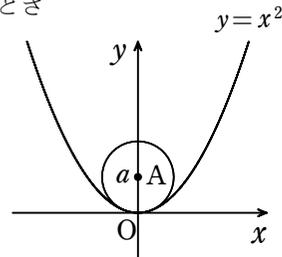
$$a \leq \frac{1}{2} \text{ のとき } r=|a| \quad \dots\dots(\text{答})$$



$a < 0$  のとき



$0 < a \leq \frac{1}{2}$  のとき



(ii) 放物線と円が原点以外で接する場合

③ が  $y>0$  となる重解をもてばよい。

③' から  $-a + r^2 + \frac{1}{4} = 0$  かつ  $a - \frac{1}{2} > 0$  すなわち

$$a > \frac{1}{2} \text{ のとき } r = \sqrt{a - \frac{1}{4}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$z = y^2 - (2a-1)y + a^2 - r^2$$

