

問題 放物線 $y=a(1-x^2)$ と x 軸で囲まれる範囲にあり、原点で x 軸に接する円の半径の最大値を求めよ。ただし、 $a>0$ とする。 (1981 一橋大)

解答 放物線 $y=a(1-x^2)$ ……① と x 軸で囲まれる範囲を R とし、 R 内の y 軸上の点を $C(0, r)$ ($0<r<a$) とする。点 $P(x, y)$ が放物線 ① 上を点 $(0, a)$ から点 $(1, 0)$ まで動くとき、線分 CP の長さ d の最小値が求める円の半径 r となる。

① を用いると

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2 + (y-r)^2 = 1 - \frac{y}{a} + (y-r)^2 \\ &= y^2 - \left(2r + \frac{1}{a}\right)y + r^2 + 1 \\ &= \left\{y - \left(r + \frac{1}{2a}\right)\right\}^2 - \left(r + \frac{1}{2a}\right)^2 + r^2 + 1 \end{aligned}$$

$0 \leq y \leq a$ で d^2 の最小値を考えればよい。

(i) $0 < r + \frac{1}{2a} \leq a$ ……② の場合

$y = r + \frac{1}{2a}$ のとき d^2 は最小値をとり

$$r^2 = -\left(r + \frac{1}{2a}\right)^2 + r^2 + 1 \quad \text{から} \quad r + \frac{1}{2a} = 1$$

$$\text{よって} \quad r = 1 - \frac{1}{2a}$$

このとき接点の y 座標は 1 であり、② は $1 \leq a$

(ii) $a < r + \frac{1}{2a}$ ……③ の場合

$y = a$ のとき d^2 は最小値をとり

$$r^2 = 1 - \frac{a}{a} + (a-r)^2 \quad \text{から} \quad r = \frac{a}{2}$$

このとき接点は $(0, a)$ であり、③ は $a < \frac{a}{2} + \frac{1}{2a}$ から $0 < a < 1$

以上をまとめると

$$0 < a < 1 \text{ のとき } r = \frac{a}{2}, \quad 1 \leq a \text{ のとき } r = 1 - \frac{1}{2a}$$

