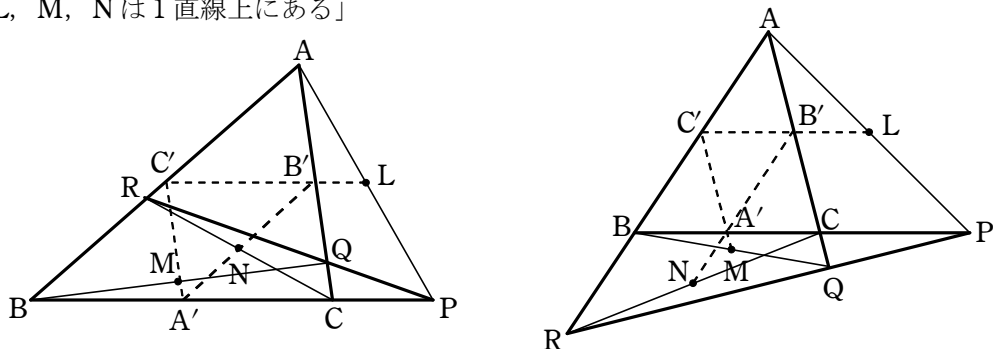


ニュートン線

「ある直線が $\triangle ABC$ の辺 BC , CA , AB またはその延長とそれぞれ P , Q , R で交わり、線分 AP , BQ , CR の中点をそれぞれ L , M , N とする。このとき、3点 L , M , N は1直線上にある」



どの2本も互いに交わり、どの3本も共通の交点をもたない、相異なる4本の直線によって決定される図形を**完全四辺形**という。4つの直線 AB , BC , CA , PQ を完全四辺形の辺、 A , B , C , P , Q , R を頂点、線分 AP , BQ , CR を対角線という。このとき、上の定理は次のように表現される。

「完全四辺形の3つの対角線の中点は1直線上にある」
対角線の中点 L , M , N を含む直線を完全四辺形の**ニュートン線**という。

[証明]

$\triangle ABC$ と直線 PQR にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad \dots\dots ①$$

辺 BC , CA , AB の中点をそれぞれ A' , B' , C' とする。

3点 L , B' , C' については、 $\triangle ABP$ と $\triangle ACP$ に中点連結定理を用いると $C'L \parallel BP$, $LB' \parallel PC$ であるから、3点 L , B' , C' は1直線上にあり

$$C'L = \frac{1}{2}BP, \quad LB' = \frac{1}{2}PC \quad \dots\dots ②$$

同様にして、3点 M , C' , A' および3点 N , A' , B' はそれぞれ1直線上にあり

$$A'M = \frac{1}{2}CQ, \quad MC' = \frac{1}{2}QA, \quad B'N = \frac{1}{2}AR, \quad NA' = \frac{1}{2}RB \quad \dots\dots ③$$

①, ②, ③ により

$$\frac{2C'L}{2LB'} \cdot \frac{2A'M}{2MC'} \cdot \frac{2B'N}{2NA'} = 1 \quad \text{よって} \quad \frac{C'L}{LB'} \cdot \frac{B'N}{NA'} \cdot \frac{A'M}{MC'} = 1 \quad \dots\dots ④$$

$\triangle A'B'C'$ の辺または延長上の3点 L , M , N について、④によりメネラウスの定理の逆が成り立つから、3点 L , M , N は1直線上にある。 (証明終)

この定理は次のようにも表現される。

「四角形 $ABCD$ の対辺 AB , CD の延長が交点 E をもち、対辺 AD , BC の延長が交点 F をもち、線分 AC , BD , EF の中点をそれぞれ L , M , N とする。
このとき、3点 L , M , N は1直線上にある」

[ベクトルによる証明]

点 A を基準として、位置ベクトルを

$$B(\vec{b}), D(\vec{d}), E(s\vec{b}), F(t\vec{d})$$

とすると

$$M\left(\frac{\vec{b} + \vec{d}}{2}\right), N\left(\frac{s\vec{b} + t\vec{d}}{2}\right)$$

ただし、 s, t は $s > 1, t > 1$ となる実数である。 x を実数として

$$EC : CD = (1-x) : x$$

とおくと、 $\triangle AED$ と直線 BCF についてメネラウスの定理を用いて

$$\frac{1}{1-s} \cdot \frac{1-x}{x} \cdot \frac{t-1}{t} = 1 \quad \text{よって} \quad x = \frac{t-1}{st-1}$$

これから $\overrightarrow{AC} = x \cdot s\vec{b} + (1-x) \cdot \vec{d} = \frac{s(t-1)}{st-1} \vec{b} + \frac{(s-1)t}{st-1} \vec{d}$ により

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{s(t-1)\vec{b} + (s-1)t\vec{d}}{2(st-1)}$$

ここで

$$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} - \frac{s(t-1)\vec{b} + (s-1)t\vec{d}}{2(st-1)} = \frac{(s-1)\vec{b} + (t-1)\vec{d}}{2(st-1)}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{s\vec{b} + t\vec{d}}{2} - \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} = \frac{(s-1)\vec{b} + (t-1)\vec{d}}{2}$$

したがって $\overrightarrow{MN} = (st-1) \overrightarrow{LM}$ すなわち、3点 L, M, N は1直線上にある。

(証明終)

