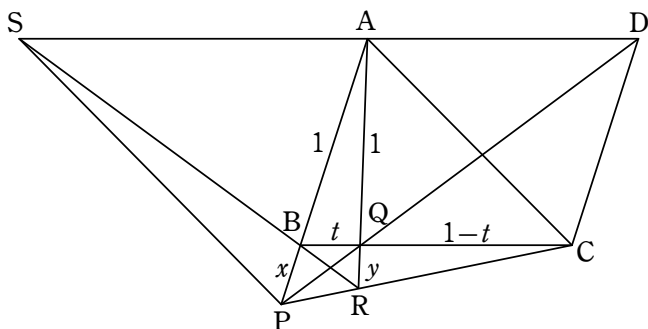


問題 平行四辺形 ABCD の辺 BC 上の点を Q とし、DQ と AB の交点を P、AQ と CP の交点を R、BR と AD の交点を S とすれば、PS//AC である。



証明 BQ : QC = t : (1-t), PB : BA = x : 1 とおく。△PQB ∽ △PDA であるから

$$x : 1 = t : (1-t) \text{ よって } x = \frac{t}{1-t} \text{ また } \frac{AP}{BA} = 1 + x = \frac{1}{1-t} \text{ ……①}$$

RQ : QA = y : 1 とおく。△ABQ と直線 PRC についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BC}{CQ} \cdot \frac{QR}{RA} = 1 \text{ すなわち } \frac{1+x}{x} \cdot \frac{1}{1-t} \cdot \frac{y}{1+y} = 1$$

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1-t} = \frac{1+y}{y} \text{ より } y = \frac{t(1-t)}{1-t+t^2} \text{ また } 1+y = \frac{1}{1-t+t^2}$$

△RAS ∽ △RQB であるから

$$\frac{AS}{QB} = \frac{AR}{QR} = \frac{1+y}{y} = \frac{1}{t(1-t)} \text{ よって } \frac{AS}{BC} = \frac{1}{t(1-t)} \cdot \frac{QB}{BC} = \frac{1}{1-t} \text{ ……②}$$

△PAS と △ABC において

$$\angle PAS = \angle ABC, \quad \text{① と ② から } \frac{AP}{BA} = \frac{AS}{BC}$$

よって △PAS ∽ △ABC

したがって ∠APS = ∠BAC であるから PS//AC

(証明終)