

[フランク・モーリー(Frank Morley)の定理]

$\triangle ABC$ の内角の 3 等分線をひき、各辺に近い線同士の交点を D, E, F とすると、 $\triangle DEF$ は正三角形になる。

[証明]

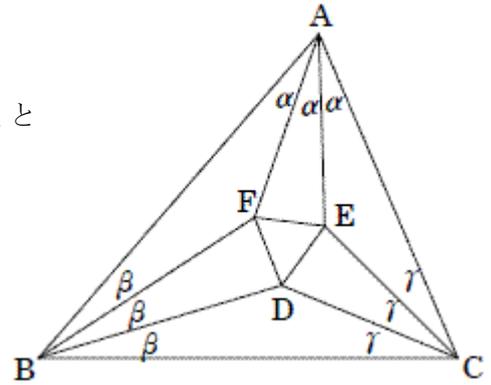
$\triangle ABC$ の内角について $\angle A=3\alpha$, $\angle B=3\beta$, $\angle C=3\gamma$ とおくと

$$\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$$

$\triangle ABF$ において正弦定理を用いると

$$\frac{AF}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{2R \sin 3\gamma}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{2R \sin 3\gamma}{\sin(60^\circ - \gamma)}$$

$$\therefore AF = \frac{2R \sin \beta \sin 3\gamma}{\sin(60^\circ - \gamma)} \quad \dots\dots ①$$



ここで $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とし、 $\frac{AB}{\sin 3\gamma} = 2R$ を用いた。3 倍角の公式から

$$\begin{aligned} \sin 3\gamma &= 3 \sin \gamma - 4 \sin^3 \gamma = \sin \gamma (3 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \\ &= 4 \sin \gamma \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \gamma + \frac{1}{2} \sin \gamma \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \gamma - \frac{1}{2} \sin \gamma \right) \\ &= 4 \sin \gamma \sin(60^\circ + \gamma) \sin(60^\circ - \gamma) \end{aligned}$$

よって、①より $AF = 8R \sin \beta \sin \gamma \sin(60^\circ + \gamma) \quad \dots\dots ②$

$\triangle ACE$ において、同様にして (γ と β を入れ換えて考えればよい)

$$AE = 8R \sin \gamma \sin \beta \sin(60^\circ + \beta) \quad \dots\dots ③$$

$\triangle AEF$ において余弦定理を用いると、②、③により

$$\begin{aligned} EF^2 &= AE^2 + AF^2 - 2 AE \cdot AF \cos \alpha \\ &= (8R \sin \beta \sin \gamma)^2 \left\{ \sin^2(60^\circ + \beta) + \sin^2(60^\circ + \gamma) - 2 \sin(60^\circ + \beta) \sin(60^\circ + \gamma) \cos \alpha \right\} \end{aligned}$$

$$\dots\dots ④$$

ここで、直径 1 の円に内接し、3 つの内角が α , $60^\circ + \beta$, $60^\circ + \gamma$ である $\triangle STU$ をとると、正弦定理により

$$\frac{s}{\sin \alpha} = \frac{t}{\sin(60^\circ + \beta)} = \frac{u}{\sin(60^\circ + \gamma)} = 1$$

であるから、④の { …… } について

$$\{ \dots\dots \} = t^2 + u^2 - 2tu \cos \alpha = s^2 = \sin^2 \alpha$$

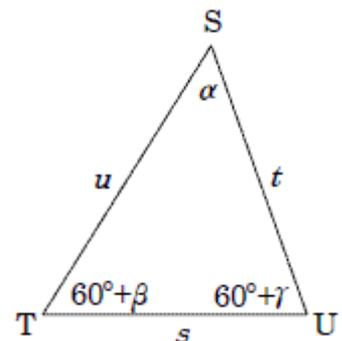
したがって $EF^2 = (8R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)^2$ より

$$EF = 8R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

同様にして (α , β , γ を循環して考えればよい)

$$DE = FD = 8R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

であるから $DE = EF = FD$ となる。すなわち、 $\triangle DEF$ は正三角形である。 (証明終)



[補 足]

実は $\angle AFE = 60^\circ + \beta$, $\angle AEF = 60^\circ + \gamma$ である。