

ナポレオンの定理

三角形 ABC の外側に辺 BC, CA, AB を一辺とする正三角形をつくるとき、それらの重心を結んでできる三角形 LMN は正三角形である。

余弦定理等による証明

$\angle BAC = A$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とする。

$$AM = AC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad AN = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$\triangle AMN$ において、余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} MN^2 &= \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} \cos(A + 60^\circ) \\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2}{3}bc \left(\frac{1}{2} \cos A - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A\right) \\ &= \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - bccos A) + \frac{1}{\sqrt{3}}bc \sin A \end{aligned}$$

ここで、 $\triangle ABC = S$ とし、 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\frac{1}{2}bc \sin A = S$ を用いると

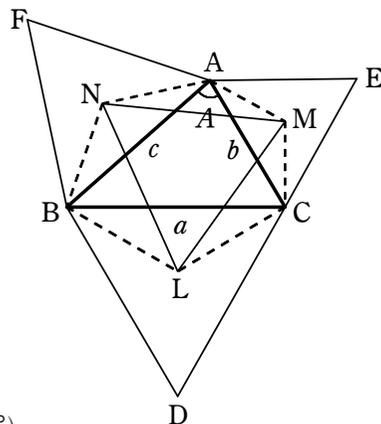
$$MN^2 = \frac{1}{3} \left(b^2 + c^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} S = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{\sqrt{3}} S$$

NL^2 , LM^2 についても同様にして、同じ式が得られるから

$$MN = NL = LM$$

となる。すなわち、 $\triangle LMN$ は正三角形である。

(証明終)



補足

$\triangle LMN$ の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4} MN^2 = \frac{\sqrt{3}}{24}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{2} S$ である。

右図のように、3つの正三角形を”内側”につくった場合も重心を結んだ $\triangle L'M'N'$ は正三角形になる。

証明は

$$\begin{aligned} M'N'^2 &= \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} \cos(A - 60^\circ) \\ &= \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{2}{\sqrt{3}} S \end{aligned}$$

と変わる。したがって、大小の正三角形の面積の差は

$$\triangle LMN - \triangle L'M'N' = S$$

となる。

