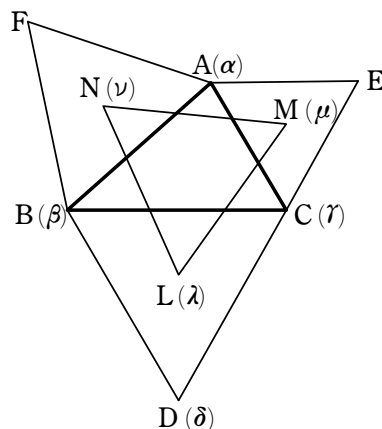


ナポレオンの定理

三角形 ABC の外側に辺 BC, CA, AB を一辺とする正三角形をつくるとき、それらの重心を結んでできる三角形 LMN は正三角形である。



複素数による証明

図のように頂点および重心を表す複素数を

$$A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), D(\delta), L(\lambda), M(\mu), N(\nu)$$

とする。また、 60° の回転を表す複素数を ω とすると

$$\omega = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$$

であり

$$\omega^3 = (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)^3 = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ = -1 \quad \text{より} \quad \omega^3 + 1 = 0$$

$$(\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 1) = 0 \quad \text{かつ} \quad \omega + 1 \neq 0 \quad \text{であるから} \quad \omega^2 - \omega + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$D(\delta)$ は $C(\gamma)$ の周りで $B(\beta)$ を 60° だけ回転した点であるから

$$\frac{\delta - \gamma}{\beta - \gamma} = \omega \quad \text{より} \quad \delta = \omega\beta + (1 - \omega)\gamma$$

$L(\lambda)$ は三角形 BCD の重心であるから

$$\lambda = \frac{\beta + \gamma + \delta}{3} = \frac{1}{3}\{(1 + \omega)\beta + (2 - \omega)\gamma\}$$

$M(\mu)$, $N(\nu)$ についても, α, β, γ をサイクリックに置き換えることにより

$$\mu = \frac{1}{3}\{(1 + \omega)\gamma + (2 - \omega)\alpha\}, \quad \nu = \frac{1}{3}\{(1 + \omega)\alpha + (2 - \omega)\beta\}$$

となる。これらから

$$\frac{\nu - \lambda}{\mu - \lambda} = \frac{(1 + \omega)\alpha + (1 - 2\omega)\beta + (-2 + \omega)\gamma}{(2 - \omega)\alpha + (-1 - \omega)\beta + (-1 + 2\omega)\gamma}$$

ここで、分子の係数について $\textcircled{1}$ を用いると

$$1 + \omega = (\omega - \omega^2) + \omega = \omega(2 - \omega), \quad 1 - 2\omega = (\omega - \omega^2) - 2\omega = \omega(-1 - \omega),$$

$$-2 + \omega = -2(\omega - \omega^2) + \omega = \omega(-1 + 2\omega)$$

したがって

$$\frac{\nu - \lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\omega(2 - \omega)\alpha + \omega(-1 - \omega)\beta + \omega(-1 + 2\omega)\gamma}{(2 - \omega)\alpha + (-1 - \omega)\beta + (-1 + 2\omega)\gamma} = \omega$$

となる。これは、M を L の周りで 60° だけ回転した点が N であることを示している。すなわち、三角形 LMN は正三角形である。 (証明終)