

定理

四角形  $ABCD$  が円  $\odot$  に外接するとき、対角線  $AC, BD$  の中点をそれぞれ  $M, N$  とすると、点  $M, N, P$  は一直線上にある。(ニュートンの定理)

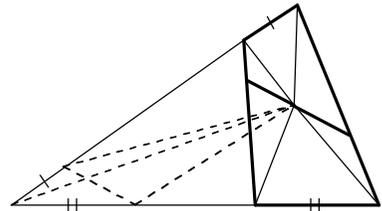
補助定理

平行四辺形でない四角形  $ABCD$  内の点  $P$  をとるとき、 $\triangle PAB, \triangle PCD$  が一定となるような点  $P$  の軌跡は線分である。

補助定理の証明

辺  $AB, CD$  が平行でないとき、その延長の交点を  $E$  とし、 $AC, BD$  の上に点  $M, N$  を

$$\triangle PAB \sim \triangle PCD \quad \triangle PAB \sim \triangle PCD$$



であるようにとる。 $\triangle PAB \sim \triangle PCD$  であるから、上式の左辺が一定であるとき、 $\triangle PAB$  も一定である。 $P$  の軌跡は、 $AC$  を通って  $BE$  に平行な、四角形  $ABCD$  の内部の線分である。

辺  $AB, CD$  が平行のとき、 $\triangle PAB \sim \triangle PCD$  が一定ならば  $\triangle PAB \sim \triangle PCD$  も一定だから、 $AC, BD$  の延長について同様にすればよい。(証明終)

ニュートンの定理の証明

四角形  $ABCD$  が平行四辺形のときは、点  $M, N, P$  は一致する。

四角形  $ABCD$  が平行四辺形でないとき、その面積を  $S$  とする。 $S = S_1 + S_2$  であるから

$$\triangle PAB + \triangle PCD - \triangle PBC - \triangle PAD = S_1 - S_2 \quad \dots\dots ①$$

$M$  も  $N$  の中点であるから、同様にして

$$\triangle PAB + \triangle PCD - \triangle PBC - \triangle PAD = S_1 - S_2 \quad \dots\dots ②$$

次に、円  $\odot$  の半径を  $r$  とすると

$$\triangle PAB + \triangle PCD - \triangle PBC - \triangle PAD = 4r \quad \dots\dots ③$$

四角形  $ABCD$  は円  $\odot$  に外接するから  $S_1 = S_2$  したがって

$$\triangle PAB + \triangle PCD = \triangle PBC + \triangle PAD = 4r \quad \dots\dots ③$$

①, ②, ③から補助定理により、点  $M, N, P$  は一直線上にある。

(証明終)

