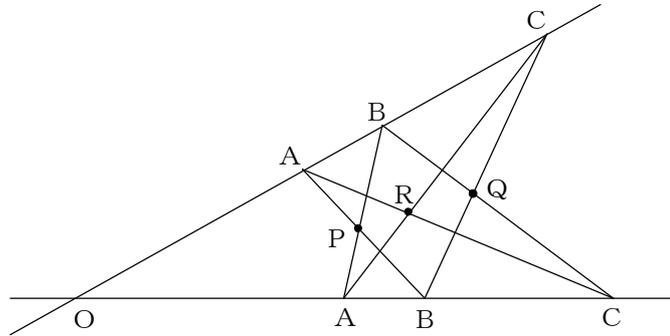


定 理

直線 l 上に点 A, B, C を、直線 l' 上に点 A', B', C' をとり、 AB と $A'B'$ の交点を P 、 BC と $B'C'$ の交点を Q 、 CA と $C'A'$ の交点を R とする。このとき、点 P, Q, R は直線 l 上にある。



証 明

直線 l 、 l' の交点を O とし、 l 、 l' に平行な単位ベクトルをそれぞれ \vec{e}, \vec{e}' 、また $\vec{OA} = x\vec{e}$ 、 $\vec{OB} = y\vec{e}$ 、 $\vec{OC} = z\vec{e}$ 、 $\vec{OA'} = x'\vec{e}'$ 、 $\vec{OB'} = y'\vec{e}'$ 、 $\vec{OC'} = z'\vec{e}'$ とする。

AB と $A'B'$ の交点 P について

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda(\vec{OB} - \vec{OA}) = \vec{OA'} + \mu(\vec{OB'} - \vec{OA'})$$

とおいて、 λ, μ を求めることにより

$$\vec{OP} = \frac{y\lambda}{1-\lambda}\vec{e} + \frac{x\lambda}{1-\lambda}\vec{e} = \frac{y\lambda}{1-\lambda}\vec{e}' + \frac{x'\lambda}{1-\lambda}\vec{e}' \dots\dots ①$$

となる。 \vec{OQ} 、 \vec{OR} についても同様にして、 \vec{e}, \vec{e}' をサイクリックに置き換えた式が得られるので、これらをそれぞれ ②, ③ とする。ここで、①、②、③ をつくり、辺々たしあわせると、右辺は \vec{e} となる。すなわち

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{OR} - \vec{OR} = \vec{OQ} + \vec{OR} - \vec{OR}$$

とおくと、

$$\vec{OP} + \vec{OR} + \vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{OR} + \vec{OQ}$$

となる。したがって、点 P, Q, R は直線 l 上にある。 証明終