

放物線に点 P から 2 本の接線をひき、接点を A, B とする。また、放物線の焦点を F とする。このとき
 $\triangle FAP \sim \triangle FPB$

[証明]

放物線の方程式を $y = ax^2$ ($a > 0$) として、考えてよい。

焦点は $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$, 準線 ℓ の方程式は $y = -\frac{1}{4a}$ である。

2 つの接点を $A(\alpha, a\alpha^2)$, $B(\beta, a\beta^2)$ とすると, A, B における 2 本の接線の交点 P の座標は $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, a\alpha\beta\right)$ となり

$$\vec{FA} = \left(\alpha, a\alpha^2 - \frac{1}{4a}\right), \quad \vec{FB} = \left(\beta, a\beta^2 - \frac{1}{4a}\right),$$

$$\vec{FP} = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, a\alpha\beta - \frac{1}{4a}\right)$$

$|\vec{FA}|$ は、放物線の定義により A と ℓ の距離に等しいから

$$|\vec{FA}| = a\alpha^2 + \frac{1}{4a} \quad \text{同様に} \quad |\vec{FB}| = a\beta^2 + \frac{1}{4a}$$

$$\text{さらに} \quad |\vec{FP}|^2 = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \left(a\alpha\beta - \frac{1}{4a}\right)^2 = a^2\alpha^2\beta^2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} + \frac{1}{16a^2}$$

$$= \left(a\alpha^2 + \frac{1}{4a}\right)\left(a\beta^2 + \frac{1}{4a}\right) = |\vec{FA}||\vec{FB}|$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{|\vec{FP}|}{|\vec{FA}|} = \frac{|\vec{FB}|}{|\vec{FP}|} \quad \dots\dots ①$$

$$\text{また,} \quad \vec{FA} \cdot \vec{FP} = \alpha \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + \left(a\alpha^2 - \frac{1}{4a}\right)\left(a\alpha\beta - \frac{1}{4a}\right) = a^2\alpha^2 \cdot \alpha\beta + \frac{\alpha^2 + \alpha\beta}{4} + \frac{1}{16a^2}$$

$$= \left(a\alpha^2 + \frac{1}{4a}\right)\left(a\alpha\beta + \frac{1}{4a}\right) = |\vec{FA}|\left(a\alpha\beta + \frac{1}{4a}\right)$$

$$\text{同様にして} \quad \vec{FB} \cdot \vec{FP} = |\vec{FB}|\left(a\alpha\beta + \frac{1}{4a}\right)$$

$$\cos \angle AFP = \frac{\vec{FA} \cdot \vec{FP}}{|\vec{FA}||\vec{FP}|} = \frac{1}{|\vec{FP}|}\left(a\alpha\beta + \frac{1}{4a}\right), \quad \cos \angle BFP = \frac{\vec{FB} \cdot \vec{FP}}{|\vec{FB}||\vec{FP}|} = \frac{1}{|\vec{FP}|}\left(a\alpha\beta + \frac{1}{4a}\right)$$

であるから $\angle AFP = \angle BFP \quad \dots\dots ②$

したがって ①, ② により, $\triangle FAP$ と $\triangle FPB$ は 2 組の辺の比とその間の角が相等であるから

$$\triangle FAP \sim \triangle FPB$$

(証明終)

