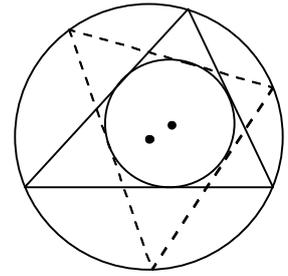


定 理

$\triangle ABC$ の外接円の中心を O , 内接円の中心を I とするとき, 円 O に内接し, 円 I に外接する三角形が無数に存在する。



証 明

外心 O と内心 I が一致する場合は, $\triangle ABC$ が正三角形のときであり, 対称性から定理は成り立つ。

次に O と I が一致しない場合について考える。

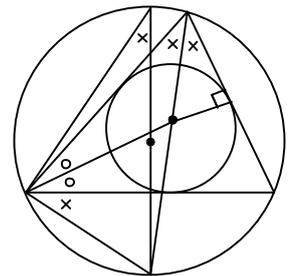
外接円の半径を R , 内接円の半径を r とする。 AI の延長と外接円の交点を D とし, BI の延長と外接円の交点を E とする。 DE から BC へ垂線をひき交点を F とすると, F は内接円と BC の接点である。

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において

$$\angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle E, \quad \angle C = \angle F$$

であるから $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ となり

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \quad \text{すなわち} \quad \dots\dots①$$



次に $\triangle DEF$ において

$$\angle D = \angle A, \quad \angle E = \angle B, \quad \angle F = \angle C$$

ここで $\angle D = \angle A$, $\angle E = \angle B$ であるから

$$\angle F = \angle C$$

$\triangle DEF$ は $\triangle ABC$ の二等辺三角形となり, ①より $\dots\dots②$

いま, 円 O の周上に任意の点 P をとり, P から円 O に接線をひき円 O との交点を Q , R とし, Q から円 I に接線をひき円 I との交点を S とする。 P と S が一致することを示せば定理が証明される。

AP の延長と円 O の交点を T とし, BP の延長と円 O との交点を U とする。

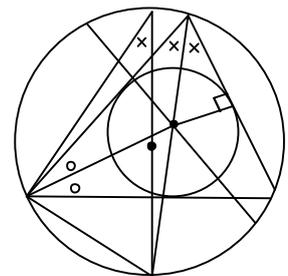
から TU へ垂線をひき交点を V とする。

まず方べきの定理により

$$AP \cdot PT = BP \cdot PU \quad \text{これと②より} \quad \dots\dots③$$

$\triangle APQ \sim \triangle BPS$ であるから

$$\frac{AP}{BS} = \frac{AQ}{BP} = \frac{PQ}{PS} \quad \text{すなわち} \quad \dots\dots④$$



③と④から $AP = AS$ によって

P と S は一致する。 証明終