

例題

△ABCの辺BCの中点をDとし、△ABDの外接円と∠ADBの二等分線との交点をE、△ACDの外接円と∠ADCの二等分線との交点をFとする。  
このとき、AD⊥EFであることを証明せよ。

証明

まず

$$DE^2 = DA \cdot DB + EA^2$$

となることを証明する。

∠ADE = ∠BDE であるから

$$\widehat{EA} = \widehat{EB} \text{ よって } EA = EB$$

ここで DA = a, DB = b, EA = EB = c とおく。

四角形 DAEB は円に内接するから ∠DAE = θ とおくと ∠DBE = 180° - θ

余弦定理を用いて

$$DE^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta \quad \dots\dots ①$$

$$DE^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(180^\circ - \theta) = b^2 + c^2 + 2bc \cos \theta \quad \dots\dots ②$$

①×b + ②×a から cos θ を消去すると

$$b DE^2 + a DE^2 = b(a^2 + c^2) + a(b^2 + c^2)$$

$$(a+b)DE^2 = (a+b)ab + (a+b)c^2$$

したがって

$$DE^2 = ab + c^2 \text{ すなわち } DE^2 = DA \cdot DB + EA^2 \quad \dots\dots ③$$

四角形 DAFC についても同様にして

$$DF^2 = DA \cdot DC + FA^2 \quad \dots\dots ④$$

③, ④ より

$$DE^2 - EA^2 = DA \cdot DB, \quad DF^2 - FA^2 = DA \cdot DC$$

DB = DC であるから

$$DE^2 - EA^2 = DF^2 - FA^2 \text{ したがって } AD \perp EF$$

(証明終)

