

清宮の定理

$\triangle ABC$ の外接円 O の周上の2点を P, Q とし、点 P の BC, CA, AB に関する対称点をそれぞれ L, M, N とする。 QL, QM, QN と BC, CA, AB との交点をそれぞれ X, Y, Z とするとき、3点 X, Y, Z は一直線上にある。

[証明]

証明にはメネラウスの定理の逆を用いる。

まず、 $\angle QBN = \angle QCM$ を示す。

四角形 $ABQC$ は円 O に内接するから

$$\angle QBA = \angle QCY \quad \dots\dots ①$$

また、 N は AB に関する対称点であり、四角形 $ABPC$ は円 O に内接、さらに、 M は AC に関する対称点であるから

$$\angle NBA = \angle PBA = \angle PCY = \angle MCY \quad \dots\dots ②$$

よって、①、②により

$$\angle QBN = \angle QBA + \angle NBA = \angle QCY + \angle MCY = \angle QCM$$

これから
$$\frac{\triangle QBN}{\triangle QCM} = \frac{BQ \cdot BN}{CQ \cdot CM} = \frac{BQ \cdot BP}{CQ \cdot CP}$$

同様にして $\angle QCL = \angle QAN, \angle QAM = \angle QBL$ から

$$\frac{\triangle QCL}{\triangle QAN} = \frac{CQ \cdot CL}{AQ \cdot AN} = \frac{CQ \cdot CP}{AQ \cdot AP}, \quad \frac{\triangle QAM}{\triangle QBL} = \frac{AQ \cdot AM}{BQ \cdot BL} = \frac{AQ \cdot AP}{BQ \cdot BP}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} &= \frac{\triangle QAM}{\triangle QCM} \cdot \frac{\triangle QCL}{\triangle QBL} \cdot \frac{\triangle QBN}{\triangle QAN} \\ &= \frac{\triangle QAM}{\triangle QBL} \cdot \frac{\triangle QCL}{\triangle QAN} \cdot \frac{\triangle QBN}{\triangle QCM} \\ &= \frac{AQ \cdot AP}{BQ \cdot BP} \cdot \frac{CQ \cdot CP}{AQ \cdot AP} \cdot \frac{BQ \cdot BP}{CQ \cdot CP} = 1 \end{aligned}$$

よって、メネラウスの定理の逆により、3点 X, Y, Z は一直線上にある。

(証明終)

