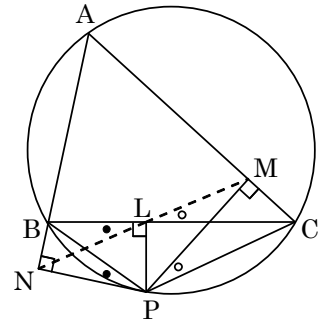


### シムソン (Simson) の定理

$\triangle ABC$  の外接円の周上の、頂点と異なる点  $P$  から、直線  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  に垂線をひき、交点をそれぞれ  $L$ ,  $M$ ,  $N$  とするとき、この 3 点は一直線上にある。  
(この直線をシムソン線という)



#### 証明

右の図において、線分  $LN$ ,  $LM$  をひき、 $\angle BLN = \angle CLM$  であることを示す。

$\angle BNP = \angle BLP = 90^\circ$  より、 $B, N, P, L$  は  $BP$  を直径とする円周上にあるから

$$\angle BLN = \angle BPN \quad \dots\dots ① \quad (\bullet \text{印})$$

また、 $\angle PLC = \angle PMC = 90^\circ$  より、 $L, P, C, M$  は  $PC$  を直径とする円周上にあるから

$$\angle CLM = \angle CPM \quad \dots\dots ② \quad (\circ \text{印})$$

さらに、四角形  $ABPC$  は円に内接するから

$$\angle PBN = \angle PCM$$

であり、 $\triangle PBN$  と  $\triangle PCM$  において、 $\angle PNB = \angle PMC = 90^\circ$  であるから

$$\angle BPN = \angle CPM \quad \dots\dots ③$$

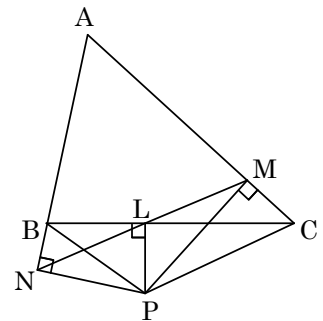
ゆえに、①, ②, ③ により

$$\angle BLN = \angle CLM$$

すなわち、3 点  $L, M, N$  は一直線上にある。 (証明終)

### シムソンの定理の逆

ある点  $P$  から  $\triangle ABC$  の 3 辺またはその延長に垂線をひき、交点を  $L, M, N$  とする。この 3 点が一直線上にあるならば、 $P$  は  $\triangle ABC$  の外接円の周上にある。



#### 証明

$B, N, P, L$  および  $L, P, C, M$  はそれぞれ同一円周上にあるから

$$\angle NBP = \angle NLP = \angle MCP$$

したがって、4 点  $A, B, P, C$  は同一円周上にある。すなわち、 $P$  は  $\triangle ABC$  の外接円の周上にある。 (証明終)

## シムソンの定理の複素数による証明

$\triangle ABC$  の外接円  $O$  の半径を 1 として考える。中心  $O$  および点  $A, B, C, L, M, N, P$  を表す複素数をそれぞれ  $0, \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, z$  とする。 $A, B, C, P$  は単位円周上にあることから

$$\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma} = z\bar{z} = 1 \quad \dots\dots①$$

が成り立つ。 $PL \perp BC$  であるから、 $\frac{z-\lambda}{\beta-\gamma}$  は純虚数、すなわち

$$\frac{z-\lambda}{\beta-\gamma} = -\overline{\left(\frac{z-\lambda}{\beta-\gamma}\right)} \quad \text{から} \quad \frac{z-\lambda}{\beta-\gamma} = -\frac{\bar{z}-\bar{\lambda}}{\bar{\beta}-\bar{\gamma}}$$

① を用いると  $\frac{z-\lambda}{\beta-\gamma} = -\frac{\beta\bar{\gamma}(\bar{z}-\bar{\lambda})}{\gamma-\beta}$  ゆえに

$$\lambda - \beta\bar{\gamma}\bar{\lambda} = z - \beta\bar{\gamma}z \quad \dots\dots②$$

また、 $L$  は  $BC$  上にあることから、 $\frac{\lambda-\gamma}{\beta-\gamma}$  は実数、すなわち

$$\frac{\lambda-\gamma}{\beta-\gamma} = \overline{\left(\frac{\lambda-\gamma}{\beta-\gamma}\right)} \quad \text{から} \quad \frac{\lambda-\gamma}{\beta-\gamma} = \frac{\bar{\lambda}-\bar{\gamma}}{\bar{\beta}-\bar{\gamma}}$$

① を用いると  $\lambda + \beta\bar{\gamma}\bar{\lambda} = \beta + \gamma \quad \dots\dots③$

②, ③ から  $\bar{\lambda}$  を消去すると  $2\lambda = z - \beta\bar{\gamma}z + \beta + \gamma$  から  $2\lambda = z - \frac{\beta\bar{\gamma}}{z} + \beta + \gamma$

$M, N$  についても同様にして  $2\mu = z - \frac{\gamma\alpha}{z} + \gamma + \alpha, \quad 2\nu = z - \frac{\alpha\beta}{z} + \alpha + \beta$

$$\text{ここで} \quad 2\mu - 2\lambda = -\frac{\gamma\alpha}{z} + \frac{\beta\bar{\gamma}}{z} + \alpha - \beta = \frac{(\alpha - \beta)(z - \gamma)}{z}$$

$$2\bar{\mu} - 2\bar{\lambda} = \frac{(\bar{\alpha} - \bar{\beta})(\bar{z} - \bar{\gamma})}{z} = \frac{(\beta - \alpha)(\gamma - z)}{\alpha\beta\bar{\gamma}}$$

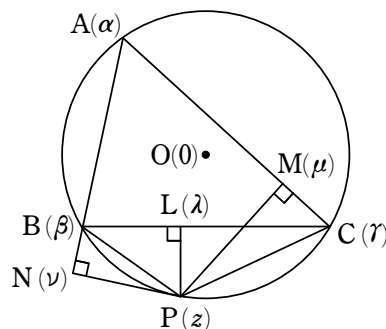
$$\text{ゆえに} \quad \frac{\mu - \lambda}{\mu - \bar{\lambda}} = \frac{\alpha\beta\bar{\gamma}}{z} \quad \dots\dots④$$

$$\text{また} \quad 2\nu - 2\lambda = \frac{(\alpha - \gamma)(z - \beta)}{z}, \quad 2\bar{\nu} - 2\bar{\lambda} = \frac{(\bar{\gamma} - \alpha)(\bar{\beta} - z)}{\alpha\beta\bar{\gamma}} \quad \text{より} \quad \frac{\nu - \lambda}{\nu - \bar{\lambda}} = \frac{\alpha\beta\bar{\gamma}}{z}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{\mu - \lambda}{\mu - \bar{\lambda}} = \frac{\nu - \lambda}{\nu - \bar{\lambda}} \quad \text{より} \quad \frac{\mu - \lambda}{\nu - \lambda} = \overline{\left(\frac{\mu - \lambda}{\nu - \lambda}\right)}$$

すなわち、3 点  $L, M, N$  は一直線上にある。

(証明終)



## 参考

- ② について  $O$  を通り  $BC$  に平行な直線に関して、 $\lambda$  と  $-\beta\bar{\gamma}\bar{\lambda}$ ,  $z$  と  $-\beta\bar{\gamma}z$  は対称
- ③ について  $O$  を通り  $BC$  に垂直な直線に関して、 $\lambda$  と  $\beta\bar{\gamma}\bar{\lambda}$ ,  $\beta$  と  $\gamma$  は対称
- ④ について  $2 \operatorname{Arg}(\mu - \lambda) \equiv \operatorname{Arg}(\alpha) + \operatorname{Arg}(\beta) + \operatorname{Arg}(\bar{\gamma}) - \operatorname{Arg}(z) \pmod{2\pi}$