

定理

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ がある。点 A, B, C からそれぞれ直線 EF, FD, DE へひいた垂線が点 P で交わるならば、点 D, E, F からそれぞれ直線 BC, CA, AB へひいた垂線も点 P で交わる。

証明

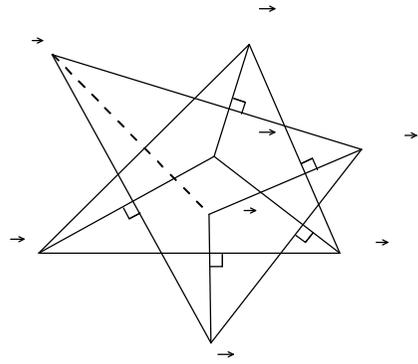
点の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ とする。

より

$$\vec{a} - \vec{e} \perp \vec{f} - \vec{e}$$

$$\vec{b} - \vec{f} \perp \vec{e} - \vec{f}$$

$$\vec{c} - \vec{e} \perp \vec{d} - \vec{e}$$



これらから

$$\vec{a} - \vec{e} \perp \vec{f} - \vec{e}, \vec{b} - \vec{f} \perp \vec{e} - \vec{f}, \vec{c} - \vec{e} \perp \vec{d} - \vec{e}$$

辺々たし合わせると

$$\vec{a} - \vec{e} + \vec{b} - \vec{f} + \vec{c} - \vec{e} \perp \vec{f} - \vec{e} + \vec{e} - \vec{f} + \vec{d} - \vec{e}$$

よって $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{e} - \vec{f} \perp \vec{d} - \vec{e}$ ①

次に、点 D, E, F からそれぞれ直線 BC, CA, AB にひいた垂線の交点を Q とすると、より

$$\vec{d} - \vec{b} \perp \vec{c} - \vec{b}, \vec{e} - \vec{c} \perp \vec{a} - \vec{c}, \vec{f} - \vec{a} \perp \vec{b} - \vec{a}$$

これらから

$$\vec{d} - \vec{b} \perp \vec{c} - \vec{b}, \vec{e} - \vec{c} \perp \vec{a} - \vec{c}, \vec{f} - \vec{a} \perp \vec{b} - \vec{a}$$

辺々たし合わせ、①を用いると

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{e} - \vec{f} \perp \vec{d} - \vec{e} + \vec{e} - \vec{f} + \vec{d} - \vec{e}$$

したがって

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{e} - \vec{f} \perp \vec{d} - \vec{e} \text{ より}$$

これは、点 D, E, F からそれぞれ直線 BC, CA, AB へひいた垂線が点 P で交わることを示している。 証明終