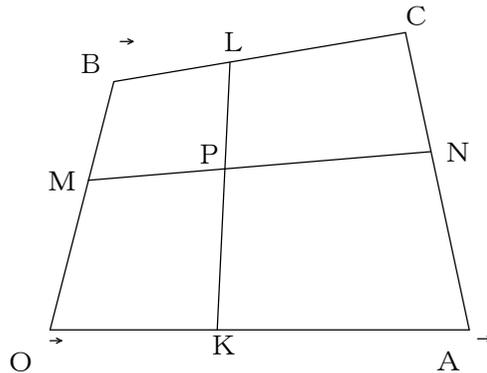


定 理

四角形 $OACB$ において、辺 OA , BC を $l : m$ の比に分ける点をそれぞれ K , L とし、辺 OB , AC を $n : p$ の比に分ける点をそれぞれ M , N とする。直線 KL と MN の交点を P とするとき、 P は線分 MN を $l : m$ の比に、 KL を $n : p$ の比に分ける。



証 明

$\vec{OA} = l\vec{OK} + m\vec{KA}$, $\vec{BC} = l\vec{BL} + m\vec{LC}$ とし、定数 α, β を用いて

$\vec{OP} = \alpha\vec{OM} + \beta\vec{ON}$ と表す。PがMNを $l : m$ の比に分けるとすると

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \alpha\vec{OM} + \beta\vec{ON} \\ &= \alpha(n\vec{OB} + p\vec{OC}) + \beta(n\vec{OB} + p\vec{OC}) \\ &= (\alpha n + \beta n)\vec{OB} + (\alpha p + \beta p)\vec{OC} \end{aligned}$$

により

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= (\alpha n + \beta n)\vec{OB} + (\alpha p + \beta p)\vec{OC} \\ &= (\alpha n + \beta n)\vec{OB} + (\alpha p + \beta p)\vec{OC} \end{aligned}$$

PがKLを $n : p$ の比に分けるとすると、同様にして

$$\vec{OP} = \frac{n}{n+p}\vec{OK} + \frac{p}{n+p}\vec{OL}$$

\vec{OA}, \vec{OB} が 次独立であることから

$$\alpha n + \beta n = \frac{n}{n+p}, \quad \alpha p + \beta p = \frac{p}{n+p}$$

これらを連立して解くと

,

となる。

証明終