

問題

- (1) 楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) の外部の点 $P(X, Y)$ から C にひいた 2 本の接線が P で直交している。このような点 P 全体のなす軌跡を求めよ。
- (2) 座標平面において、長軸の長さが $2a$ 、短軸の長さが $2b$ ($a > b > 0$) の楕円を考える。この楕円が第 1 象限において x 軸、 y 軸の両方に接しつつ可能なすべての位置にわたって動くとき、この楕円の中心の軌跡を求めよ。 (類 1995 慶應大・医)

解

(1) 接点を S, T とし, 接線 PS を P の周りで $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した接線を PT とする。また, \overrightarrow{PS} を

θ だけ回転すると x 軸の正の向きになるものとし, O から

PT, PS に垂線を引き交点をそれぞれ H, K とする。

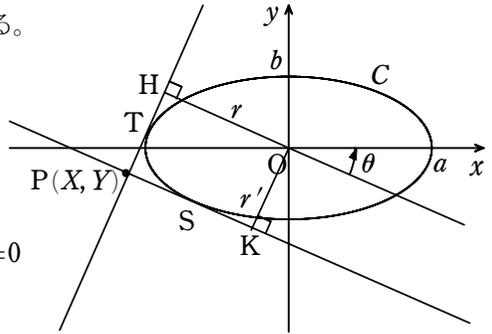
$\text{OH} = r, \text{OK} = r'$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OH}} &= (r \cos(\pi - \theta), r \sin(\pi - \theta)) \\ &= (-r \cos \theta, r \sin \theta)\end{aligned}$$

接線 PT は H を通り $\overrightarrow{\text{OH}}$ に垂直であるから

$$\begin{aligned}-r \cos \theta (x + r \cos \theta) + r \sin \theta (y - r \sin \theta) &= 0 \\ (-\cos \theta)x + (\sin \theta)y &= r\end{aligned}$$

すなわち $-\frac{\cos \theta}{r}x + \frac{\sin \theta}{r}y = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$



また, 接点 T の座標は媒介変数 t を用いて $(a \cos t, b \sin t)$ と表され, T における接線は

$$\frac{a \cos t}{a^2}x + \frac{b \sin t}{b^2}y = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\cos t}{a}x + \frac{\sin t}{b}y = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ② を比較すると

$$-\frac{\cos \theta}{r} = \frac{\cos t}{a}, \quad \frac{\sin \theta}{r} = \frac{\sin t}{b}$$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ を用いると

$$\frac{a^2 \cos^2 \theta}{r^2} + \frac{b^2 \sin^2 \theta}{r^2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \text{OH}^2 = r^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\overrightarrow{\text{OK}} = \left(r' \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \theta \right), r' \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \theta \right) \right) = (-r' \sin \theta, -r' \cos \theta)$ を用いて, 接線 PK に

ついて同様にすると

$$\text{OK}^2 = a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\text{OP}^2 = \text{OH}^2 + \text{OK}^2$ に ③, ④ を用いると

$$X^2 + Y^2 = a^2 + b^2$$

すなわち P の軌跡は, 原点を中心とする半径 $\sqrt{a^2 + b^2}$ の円である。

(2) 接線 PS, PT をそれぞれ x 軸, y 軸になるように移動すると,

楕円の中心の座標 (x, y) は

$$x = \text{OH} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{(a^2 - b^2) \cos^2 \theta + b^2}$$

$$y = \text{OK} = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 \theta + b^2}$$

$0 \leq \cos^2 \theta \leq 1, 0 \leq \sin^2 \theta \leq 1$ であるから, 楕円の中心の軌跡は円弧

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2, \quad b \leq x \leq a, \quad b \leq y \leq a$$

である。

