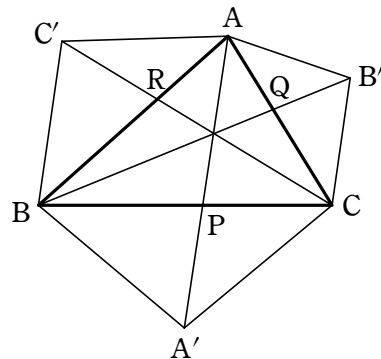


例題

$\triangle ABC$ の各辺をそれぞれの底辺とする相似な二等辺三角形 $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ を $\triangle ABC$ の外側につくる。このとき、3つの直線 AA' , BB' , CC' は1点で交わる。

証明

AA' と BC の交点を P , BB' と CA の交点を Q , CC' と AB の交点を R とする。また、 $\triangle ABC$ の頂点 A , B , C における内角をそれぞれ A , B , C , 二等辺三角形の底角を α とする。



$$\frac{BP}{PC} = \frac{\triangle ABA'}{\triangle ACA'} = \frac{\frac{1}{2}BA \cdot BA' \sin(B+\alpha)}{\frac{1}{2}CA \cdot CA' \sin(C+\alpha)} = \frac{AB \sin(B+\alpha)}{CA \sin(C+\alpha)}$$

同様にして

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{\triangle BCB'}{\triangle BAB'} = \frac{BC \sin(C+\alpha)}{AB \sin(A+\alpha)}, \quad \frac{AR}{RB} = \frac{\triangle CAC'}{\triangle CBC'} = \frac{CA \sin(A+\alpha)}{BC \sin(B+\alpha)}$$

これらから

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB \sin(B+\alpha)}{CA \sin(C+\alpha)} \cdot \frac{BC \sin(C+\alpha)}{AB \sin(A+\alpha)} \cdot \frac{CA \sin(A+\alpha)}{BC \sin(B+\alpha)} = 1$$

したがって、チェバの定理の逆により、3つの直線 AA' , BB' , CC' は1点で交わる。

(証明終)