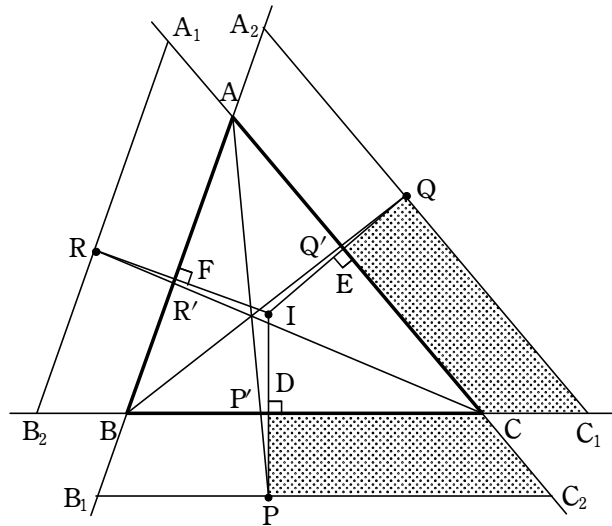


定 理

△ABCにおいて内心Iから辺BC, CA, ABに垂線をひき、その上にそれぞれ点P, Q, Rを $IP=IQ=IR$ となるようにとる。このとき、3直線AP, BQ, CRは1点で交わる。



証 明

内接円と3辺BC, CA, ABとの接点をD, E, Fとし、Pを通る辺BCの平行線と直線AB, ACとの交点を B_1, C_1 とする。同様に図のようにQ, Rを通る辺の平行線をひき交点 C_1, A_2, A_1, B_2 をとる。

台形 DPC_2C , EQC_1C において、

$$DC=EC, DP=EQ, \angle DCC_2=\angle ECC_1$$

であるから 台形 $DPC_2C \equiv$ 台形 EQC_1C よって

$$PC_2=QC_1 \quad \text{同様にして} \quad QA_2=RA_1, RB_2=PB_1 \quad \dots\dots ①$$

次に、3直線AP, BQ, CRとBC, CA, ABとの交点を P', Q', R' とする。

△ AB_1C_2 において $BC \parallel B_1C_2$ であるから

$$BP' : P'C = B_1P : PC_2$$

同様に $CQ' : Q'A = C_1Q : QA_2, AR' : R'B = A_1R : RB_2 \quad \dots\dots ②$

したがって、①, ②により

$$\begin{aligned} \frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{CQ'}{Q'A} \cdot \frac{AR'}{R'B} &= \frac{B_1P}{PC_2} \cdot \frac{C_1Q}{QA_2} \cdot \frac{A_1R}{RB_2} \\ &= \frac{B_1P}{QC_1} \cdot \frac{C_1Q}{RA_1} \cdot \frac{A_1R}{PB_1} = 1 \end{aligned}$$

チェバの定理の逆により、3直線AP, BQ, CRは1点で交わる。

(証明終)