

## 定 理

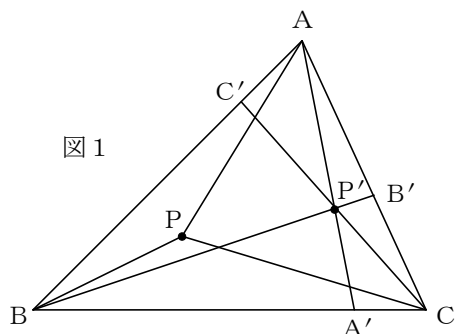
$\triangle ABC$  と点  $P$  に対して、辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  上にそれぞれ点  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  を

$$\angle BAP = \angle CAA'$$

$$\angle CBP = \angle ABB'$$

$$\angle ACP = \angle BCC'$$

となるようにとるとき、直線  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  は 1 点  $P'$  で交わる。  $P$  と  $P'$  を等角共役点という。



## 準 備

図 2 のように、 $\triangle ABC$  において、辺  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  上にそれぞれ点  $L$ ,  $M$ ,  $N$  をとるとき、直線  $AL$ ,  $BM$ ,  $CN$  が 1 点で交わるための必要十分条件は、チェバの定理およびその逆より

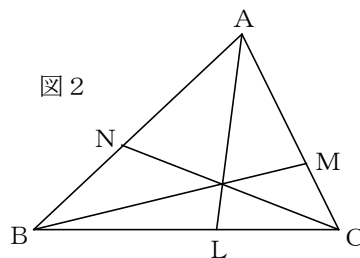
$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また

$$\frac{BL}{LC} = \frac{\triangle ABL}{\triangle ALC} = \frac{AB \sin \angle BAL}{CA \sin \angle CAL}$$

同様に  $\frac{CM}{MA} = \frac{BC \sin \angle CBM}{AB \sin \angle ABM}$ ,  $\frac{AN}{NB} = \frac{CA \sin \angle ACN}{BC \sin \angle BCN}$

$$\textcircled{1} \text{ より } \frac{\sin \angle BAL}{\sin \angle CAL} \cdot \frac{\sin \angle CBM}{\sin \angle ABM} \cdot \frac{\sin \angle ACN}{\sin \angle BCN} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$



## 証 明

図 1 において

$$\frac{\sin \angle BAP}{\sin \angle CAP} \cdot \frac{\sin \angle CBP}{\sin \angle ABP} \cdot \frac{\sin \angle ACP}{\sin \angle BCP} = 1$$

仮定より

$$\frac{\sin \angle CAA'}{\sin \angle BAA'} \cdot \frac{\sin \angle ABB'}{\sin \angle CBB'} \cdot \frac{\sin \angle BCC'}{\sin \angle ACC'} = 1$$

$$\therefore \frac{\sin \angle BAA'}{\sin \angle CAA'} \cdot \frac{\sin \angle CBB'}{\sin \angle ABB'} \cdot \frac{\sin \angle ACC'}{\sin \angle BCC'} = 1$$

したがって、直線  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  は 1 点  $P'$  で交わる。

(証明終)