

## フイエルバッハの定理

三角形の9点円はその内接円および傍接円に接する。

### 証明

(1) 準備, 利用する事項

△ABCの外心をO, 内心をI, 垂心をH, 辺の長さについてBC=a, CA=b, AB=c, 外接円の半径をR, 内接円の半径をrとする。

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

とおき, △ABCの面積をSとすると

$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr, \quad S = \frac{1}{2}ab \sin \angle C = \frac{abc}{4R} \quad \text{これらから} \quad Rr = \frac{abc}{4s} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また, ヘロンの公式から  $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  よって  $r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \quad \dots\dots \textcircled{2}$

Oを基準の点とするA, B, Cの位置ベクトルをそれぞれ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  とすると

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = R, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - |\vec{b} - \vec{c}|^2) = \frac{1}{2}(R^2 + R^2 - a^2) = R^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$\text{同様にして} \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = R^2 - \frac{b^2}{2}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = R^2 - \frac{c^2}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

9点円の半径は  $\frac{R}{2}$  であり, その中心をNとすると, Nは線分OHの中点であるから

$$\vec{OH} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad \text{より} \quad \vec{ON} = \frac{1}{2}\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

(2) 9点円が内接円に接することの証明

△ABCの∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとすれば, 角の二等分線の性質から  $BD : DC = c : b$ ,  $AI : ID = (b+c) : a$  となるから

$$\vec{OI} = \frac{a\vec{a} + (b+c)\vec{OD}}{a+b+c} = \frac{a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}}{a+b+c} = \frac{1}{2s}(a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}) \quad \text{により}$$

$$\vec{IN} = \vec{ON} - \vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2s}(a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}) = \frac{1}{2s}\{(s-a)\vec{a} + (s-b)\vec{b} + (s-c)\vec{c}\}$$

$$|\vec{IN}|^2 = \frac{1}{4s^2} \{ (s-a)^2|\vec{a}|^2 + (s-b)^2|\vec{b}|^2 + (s-c)^2|\vec{c}|^2 \\ + 2(s-b)(s-c)\vec{b} \cdot \vec{c} + 2(s-c)(s-a)\vec{c} \cdot \vec{a} + 2(s-a)(s-b)\vec{a} \cdot \vec{b} \}$$

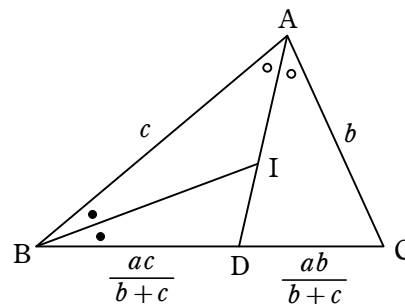
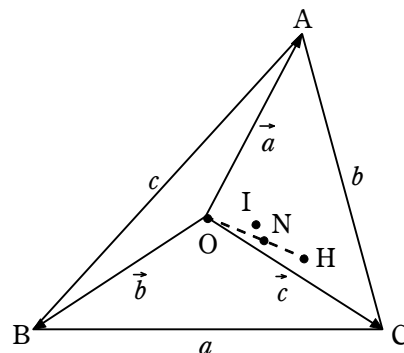
③を用いると

$$|\vec{IN}|^2 = \frac{1}{4s^2} \{ (s-a)^2R^2 + (s-b)^2R^2 + (s-c)^2R^2 \\ + 2(s-b)(s-c)\left(R^2 - \frac{a^2}{2}\right) + 2(s-c)(s-a)\left(R^2 - \frac{b^2}{2}\right) + 2(s-a)(s-b)\left(R^2 - \frac{c^2}{2}\right) \} \\ = \frac{1}{4s^2} \{ (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + 2(s-b)(s-c) + 2(s-c)(s-a) + 2(s-a)(s-b) \} R^2 \\ - \frac{1}{4s^2} \{ a^2(s-b)(s-c) + b^2(s-c)(s-a) + c^2(s-a)(s-b) \}$$

ここで第1項の {} 内の式は  $\{(s-a) + (s-b) + (s-c)\}^2 = (3s - a - b - c)^2 = s^2$

第2項の {} 内の式は  $sabc - 4s(s-a)(s-b)(s-c) \quad \dots\dots \textcircled{\text{注1}}$

となるから, ①, ②を用いると



$$\begin{aligned} |\overline{\mathbf{IN}}|^2 &= \frac{1}{4s^2} \cdot s^2 R^2 - \frac{1}{4s^2} \{sabc - 4s(s-a)(s-b)(s-c)\} = \frac{R^2}{4} - \frac{abc}{4s} + \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \\ &= \frac{R^2}{4} - rR + r^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2 \end{aligned}$$

したがって  $|\overline{\mathbf{IN}}| = \left|\frac{R}{2} - r\right|$  となり、これは9点円と内接円が内接することを示している。

(3) 9点円が傍接円に接することの証明

$\triangle ABC$  の辺  $BC$  に接する傍接円の半径を  $r_a$ 、中心を  $I_a$  とする。(他の傍接円についても以下は同様である。)

$$\begin{aligned} \frac{r_a}{r} &= \frac{s}{s-a} \quad \text{これと①, ②より} \quad Rr_a = \frac{abc}{4(s-a)}, \quad r_a^2 = \frac{s(s-b)(s-c)}{s-a} \\ \overrightarrow{OI_a} &= \frac{-a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}}{-a + b + c}, \quad \overline{I_a\mathbf{N}} = \frac{1}{2(s-a)} \{s\vec{a} - (s-c)\vec{b} - (s-b)\vec{c}\} \\ |\overline{I_a\mathbf{N}}|^2 &= \frac{1}{4(s-a)^2} \{s^2|\vec{a}|^2 + (s-c)^2|\vec{b}|^2 + (s-b)^2|\vec{c}|^2 \\ &\quad + 2(s-c)(s-b)\vec{b} \cdot \vec{c} - 2s(s-b)\vec{c} \cdot \vec{a} - 2s(s-c)\vec{a} \cdot \vec{b}\} \\ &= \frac{1}{4(s-a)^2} \{s^2 + (s-c)^2 + (s-b)^2 + 2(s-c)(s-b) - 2s(s-b) - 2s(s-c)\} R^2 \\ &\quad + \frac{1}{4(s-a)^2} \{-a^2(s-c)(s-b) + b^2s(s-b) + c^2s(s-c)\} \quad \dots\dots(\text{注2}) \\ &= \frac{1}{4(s-a)^2} \cdot (s-a)^2 R^2 + \frac{1}{4(s-a)^2} \{(s-a)abc + 4s(s-a)(s-b)(s-c)\} \\ &= \frac{R^2}{4} + \frac{abc}{4(s-a)} + \frac{s(s-b)(s-c)}{s-a} = \frac{R^2}{4} + Rr_a + r_a^2 = \left(\frac{R}{2} + r_a\right)^2 \end{aligned}$$

したがって  $|\overline{I_a\mathbf{N}}| = \frac{R}{2} + r_a$  となり、これは9点円と傍接円が外接することを示している。

(注1) まず  $abc = \{s - (s-a)\}\{s - (s-b)\}\{s - (s-c)\}$

$$\begin{aligned} &= s^3 - s^2\{(s-a) + (s-b) + (s-c)\} \\ &\quad + s\{(s-b)(s-c) + (s-c)(s-a) + (s-a)(s-b)\} - (s-a)(s-b)(s-c) \end{aligned}$$

において、右辺第1項、第2項は  $s^3 - s^2\{(s-a) + (s-b) + (s-c)\} = s^3 - s^2(3s - 2s) = 0$  であるから

$$s\{(s-b)(s-c) + (s-c)(s-a) + (s-a)(s-b)\} = abc + (s-a)(s-b)(s-c)$$

また  $a^2 = s^2 - (s^2 - a^2) = s^2 - (s+a)(s-a)$ ,  $b^2 = s^2 - (s+b)(s-b)$ ,  $c^2 = s^2 - (s+c)(s-c)$  を用いて

$$\begin{aligned} &a^2(s-b)(s-c) + b^2(s-c)(s-a) + c^2(s-a)(s-b) \\ &= s^2\{(s-b)(s-c) + (s-c)(s-a) + (s-a)(s-b)\} - \{(s+a) + (s+b) + (s+c)\}(s-a)(s-b)(s-c) \\ &= s\{abc + (s-a)(s-b)(s-c)\} - 5s(s-a)(s-b)(s-c) \\ &= sabc - 4s(s-a)(s-b)(s-c) \end{aligned}$$

(注2) 第1項の  $\{\}$  内の式は  $\{s - (s-b) - (s-c)\}^2 = (b+c-s)^2 = (2s-a-s)^2 = (s-a)^2$

第2項の  $\{\}$  内の式は  $s(s-b) = -(s-c)(s-a) + ca$ ,  $s(s-c) = -(s-a)(s-b) + ab$  を用いると

$$\begin{aligned} &-a^2(s-b)(s-c) + b^2s(s-b) + c^2(s-c) \\ &= (b+c)abc - a^2(s-b)(s-c) - b^2(s-c)(s-a) - c^2(s-a)(s-b) \\ &= (2s-a)abc - \{sabc - 4s(s-a)(s-b)(s-c)\} \\ &= (s-a)abc + 4s(s-a)(s-b)(s-c) \end{aligned}$$