

九点円の定理

図のように、 $\triangle ABC$ において、各辺の中点を K, L, M 、各頂点から対辺に下した垂線の足を D, E, F 、垂心 H と各頂点を結ぶ線分の midpoint を P, Q, R とする。このとき、9点 $K, L, M, D, E, F, P, Q, R$ は同一円周上にある。この円（九点円）の中心は線分 OH の midpoint N で半径は $\frac{r}{2}$ である。ただし、 $\triangle ABC$ の外接円の中心を O 、半径を r とする。

証明

四角形 $OKDH$ において、線分 KD の垂直二等分線は N を通るから

$$NK = ND \quad \dots \textcircled{1}$$

次に、四角形 $OKHP$ が平行四辺形であることを示す。
 $\triangle BCH, \triangle ACH$ において、 K, R, L は辺の midpoint であるから

$$KR \parallel BH \quad \text{また} \quad LR \parallel AH, \quad LR = AP = PH$$

これらより、四角形 $OKRL$ は

$$OK \parallel AD \parallel LR, \quad OL \parallel BE \parallel KR$$

であるから平行四辺形であり、四角形 $PHRL$ は

$$PH \parallel LR, \quad PH = LR$$

より平行四辺形、よって四角形 $OKHP$ も平行四辺形となる。 N は OH の midpoint であるから

$$NK = NP \quad \dots \textcircled{2}$$

また、四角形 $OKPA$ は $OK \parallel AP, OK = AP$ であるから平行四辺形であり

$$KP = OA = r \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ より

$$NK = ND = NP = \frac{r}{2}$$

同様にして

$$NL = NE = NQ = \frac{r}{2}, \quad NM = NF = NR = \frac{r}{2}$$

となり、定理が証明された。

(証明終)

