

[方べきの定理の逆]

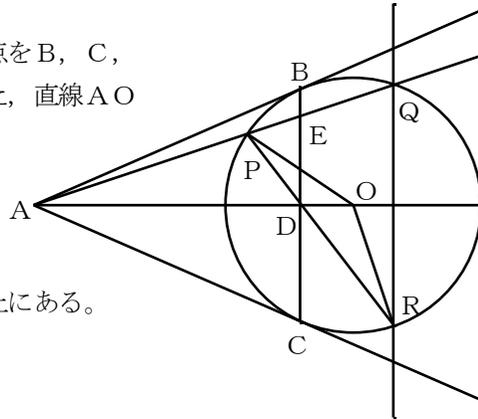
2つの線分ABとCD, またはABの延長とCDの延長が点Pで交わる時,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

が成り立つならば, 4点A, B, C, Dは1つの円周上にある。

[例題]

点Aから円Oへひいた2本の接線の接点をB, C, 弦BCと直線AOの交点をDとする。また, 直線AO上でない円Oの周上の点Pに対し, 直線PA, PDと円OとのPと異なる交点をそれぞれQ, Rとする。このとき, 次を証明せよ。



- (1) 4点A, P, O, Rは1つの円周上にある。
- (2) 直線QRは弦BCに平行である。

[証明]

$\triangle ABD$ と $\triangle BOD$ は2組の角がそれぞれ等しいから相似であり

$$DA : DB = DB : DO$$

であるから  $DA \cdot DO = DB^2 = DB \cdot DC$

また, 方べきの定理により

$$DP \cdot DR = DB \cdot DC$$

したがって  $DA \cdot DO = DP \cdot DR$

方べきの定理の逆により, 4点A, P, O, Rは1つの円周上にある。

この円の円周角として

$$\angle PAO = \angle PRO$$

これを  $\angle a$  とおく。直線APと弦BCの交点をEとすると

$$\angle AED = 90^\circ - \angle a$$

$$\text{また } \angle PQR = \frac{1}{2} \angle POR = \frac{1}{2} (180^\circ - 2\angle a) = 90^\circ - \angle a$$

同位角が等しいから直線QRと弦BCは平行である。

(点Pが弦BCに関し点Aと反対側にある場合も同様に証明できるので考えてみて下さい。)

[類題]

- (1)  $\triangle OAP \sim \triangle OPD$  (方べきの定理の逆を使わないで)
- (2)  $\triangle PBD \sim \triangle PQC \sim \triangle BQD$ ,  $DP \cdot DQ = DB^2$
- (3) 点Pが弦BCに関し点Aと同じ側にある場合  $\angle APC + \angle BPD = 180^\circ$