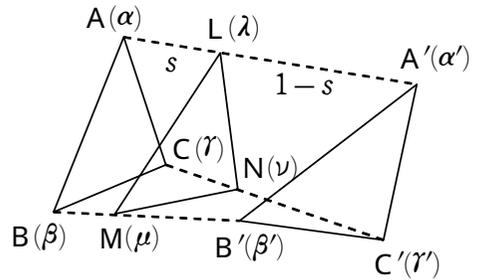


[問題]

2つの三角形の頂点を、同じ回転の向きに A, B, C および A', B', C' とし、線分 AA', BB', CC' を $s:1-s$ の比に分ける点をそれぞれ L, M, N とする。

ABC と $A'B'C'$ が相似ならば、
 LMN もこの2つの三角形と相似になることを証明せよ。



[証明]

複素数平面で考え、各頂点を表す複素数を

$$A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), A'(\alpha'), B'(\beta'), C'(\gamma'), L(\lambda), M(\mu), N(\nu)$$

とする。 $ABC \sim A'B'C'$ であるから

$$AB : A'B' = AC : A'C' \quad \text{かつ} \quad \angle BAC = \angle B'A'C'$$

すなわち $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'}$ となる。これらを ω とおくと

$$\gamma - \alpha = (\beta - \alpha)\omega, \quad \gamma' - \alpha' = (\beta' - \alpha')\omega$$

L, M, N は線分 AA', BB', CC' をそれぞれ $s:1-s$ の比に分ける点だから

$$\lambda = (1-s)\alpha + s\alpha', \quad \mu = (1-s)\beta + s\beta', \quad \nu = (1-s)\gamma + s\gamma'$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\nu - \lambda}{\mu - \lambda} &= \frac{(1-s)(\gamma - \alpha) + s(\gamma' - \alpha')}{(1-s)(\beta - \alpha) + s(\beta' - \alpha')} \\ &= \frac{(1-s)(\beta - \alpha)\omega + s(\beta' - \alpha')\omega}{(1-s)(\beta - \alpha) + s(\beta' - \alpha')} \\ &= \omega \end{aligned}$$

したがって LMN も ABC と $A'B'C'$ に相似である。