

**問題** 線分 AB と動点 P がある。P を A, B のまわりに  $90^\circ$  だけ回転した点をそれぞれ C, D とする。P が平面上を動くとき、 $\overline{CD}$  は一定であることを証明せよ。

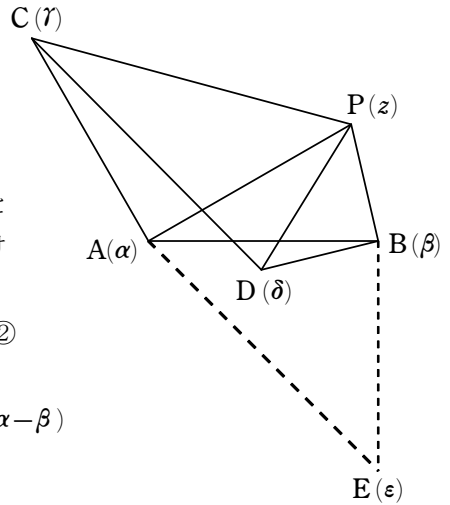
**証明** 点 P, A, B, C, D を表す複素数を  $z, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  とする。C, D はそれぞれ P を A, B のまわりに  $90^\circ$  だけ回転した点であるから

$$\gamma - \alpha = i(z - \alpha) \quad \dots\dots ①, \quad \delta - \beta = i(z - \beta) \quad \dots\dots ②$$

② - ① から

$$(\delta - \gamma) + (\alpha - \beta) = i(\alpha - \beta) \quad \text{よって} \quad \delta - \gamma = (i - 1)(\alpha - \beta)$$

すなわち  $\overline{CD}$  は P の位置に依らず一定である。



**参考** (1) A を B のまわりに  $90^\circ$  だけ回転した点を E( $\epsilon$ ) とすると

$$\epsilon - \beta = i(\alpha - \beta)$$

よって  $\epsilon - \alpha = i(\alpha - \beta) + \beta - \alpha = (i - 1)(\alpha - \beta)$

したがって  $\delta - \gamma = \epsilon - \alpha$  より  $\overline{CD} = \overline{AE}$  がいえる。

(2) 回転の角を  $90^\circ$  から一般の角  $\theta$  に変えても  $\overline{CD}$  は一定になる。上の証明において、 $i$  を  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$  に変えればよい。