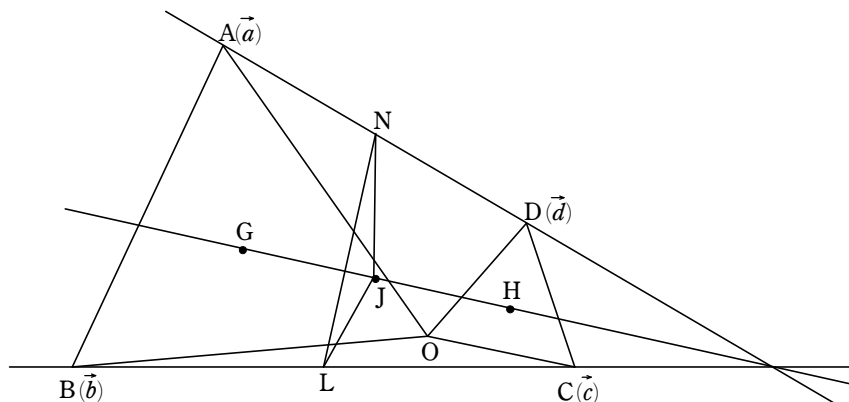


問題 点 O を共有する 2 つの正三角形 OAB , OCD の重心をそれぞれ G , H とするとき、3 つの直線 AD , BC , GH は 1 点で交わることを証明せよ。ただし、 AD と BC は平行ではないものとする。



ベクトルによる証明 線分 AD , BC , GH の中点をそれぞれ N , L , J とする。

O を基準とする頂点 A , B , C , D の位置ベクトルをそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} とすると、 $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ が正三角形であることから

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|, \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 \cos 60^\circ = \frac{1}{2} |\vec{a}|^2, |\vec{c}| = |\vec{d}|, \vec{c} \cdot \vec{d} = \frac{1}{2} |\vec{c}|^2$$

さらに $\triangle OAC \equiv \triangle OBD$ より $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d}$

G , H はそれぞれ $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ の重心であるから

$$G\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}\right), H\left(\frac{\vec{c} + \vec{d}}{3}\right) \text{ また } N\left(\frac{\vec{a} + \vec{d}}{2}\right), L\left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}\right), J\left(\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{6}\right)$$

$$\text{これらから } \vec{JN} = \vec{ON} - \vec{OJ} = \frac{\vec{a} + \vec{d}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{6} = \frac{\vec{a} + \vec{d}}{3} - \frac{\vec{b} + \vec{c}}{6}, \vec{CB} = \vec{b} - \vec{c}$$

$$\text{ここで } (\vec{a} + \vec{d}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \frac{1}{2} |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} - \frac{1}{2} |\vec{c}|^2 = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 - |\vec{c}|^2)$$

$$(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2$$

を用いると $\vec{JN} \cdot \vec{CB} = 0$ すなわち $JN \perp CB$

同様にして $\vec{JL} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} - \frac{\vec{a} + \vec{d}}{6}$, $\vec{DA} = \vec{a} - \vec{d}$ より $JL \perp DA$

さらに $\vec{HG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}}{3}$, $\vec{LN} = \frac{\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}}{2}$ より $HG \perp LN$

$\triangle NLJ$ において、3 直線 AD , BC , GH は各頂点から対辺にひいた垂線となり、したがってこの 3 直線は $\triangle NLJ$ の垂心で交わる。 (証明終)