

**問題**  $\triangle ABC$  の各辺の外側(または内側)に3つの正三角形  $BA'C$ ,  $CB'A$ ,  $AC'B$ をつくる。

このとき、次を証明せよ。

- (1) 3つの直線  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  は1点  $F$  で交わり、それぞれ  $60^\circ$  の角をなす。
- (2) 各正三角形の外接円は  $F$  を通る ( $F$  をフェルマー点という)。
- (3)  $AA' = BB' = CC'$
- (4) 正三角形  $BA'C$ ,  $CB'A$ ,  $AC'B$  の重心をそれぞれ  $G_A$ ,  $G_B$ ,  $G_C$  とするとき、 $\triangle G_A G_B G_C$  も正三角形である。

**証明**  $BB'$  と  $CC'$  の交点を  $F$  とする。

$\triangle AC'C$  と  $\triangle ABB'$  において、2辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AC'C \equiv \triangle ABB' \dots\dots \textcircled{1}$$

これから

$$\angle AC'F = \angle ABF, \quad \angle ACF = \angle AB'F$$

ゆえに、4点  $A, C', B, F$  および  $A, F, C, B'$  はそれぞれ同一円周上にある。

したがって

$$\angle C'FB = \angle C'AB = 60^\circ, \quad \angle AFC' = \angle ABC' = 60^\circ,$$

$$\angle B'FC = \angle B'AC = 60^\circ$$

さらに4点  $F, B, A', C$  は

$$\angle C'FB = 60^\circ = \angle BA'C$$

であるから、同一円周上にあり

$$\angle BFA' = \angle BCA' = 60^\circ \quad \text{ゆえに} \quad \angle AFC' + \angle C'FB + \angle BFA' = 180^\circ$$

ここまでで、(1), (2) が証明された。

次に、 $\textcircled{1}$  より  $C'C = BB'$

同様にして  $\triangle BA'A \equiv \triangle BCC'$  であるから

$$A'A = CC'$$

したがって、(3) が証明された。

最後に、 $\triangle ABC$  の重心を  $G$ , 辺  $BC$  の中点を  $M$  とすると、 $\triangle MA'A$  において

$$MG_A : G_A A' = MG : GA = 1 : 2$$

であるから  $GG_A \parallel AA'$ ,  $GG_A = \frac{1}{3} AA'$  同様にして

$$GG_B \parallel BB', \quad GG_B = \frac{1}{3} BB', \quad GG_C \parallel CC', \quad GG_C = \frac{1}{3} CC'$$

したがって、(1), (3) により、 $GG_A$ ,  $GG_B$ ,  $GG_C$  は長さが等しく、なす角がすべて  $120^\circ$

であるから、 $\triangle G_A G_B G_C$  は正三角形である。

(証明終)

