

**問題**  $\triangle ABC$  のフェルマー点を  $F$  とし、内角はすべて  $120^\circ$  より小さいものとする。 $\triangle ABC$  の内部の動点  $P$  について、線分の長さの和  $PA+PB+PC$  が最小となるのは、 $P$  が  $F$  に一致するときであることを証明せよ。

**証明**  $\triangle ABC$  の内角はすべて  $120^\circ$  より小さいから  $F$  は  $\triangle ABC$  の内部にある。

$A$  を通り  $FA$  に垂直な直線を  $\ell$  ,  $B$  を通り  $FB$  に垂直な直線を  $m$  ,  $C$  を通り  $FC$  に垂直な直線を  $n$  とする。また、 $\ell$  ,  $m$  の交点を  $I$  ,  $m$  ,  $n$  の交点を  $J$  ,  $n$  ,  $\ell$  の交点を  $K$  とする。

$$\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120^\circ$$

であるから

$$\angle I = \angle J = \angle K = 60^\circ$$

ゆえに、 $\triangle IJK$  は正三角形である。

$P$  から  $\ell$  ,  $m$  ,  $n$  に垂線をひき、交点をそれぞれ  $L$  ,  $M$  ,  $N$  とすると、補題により

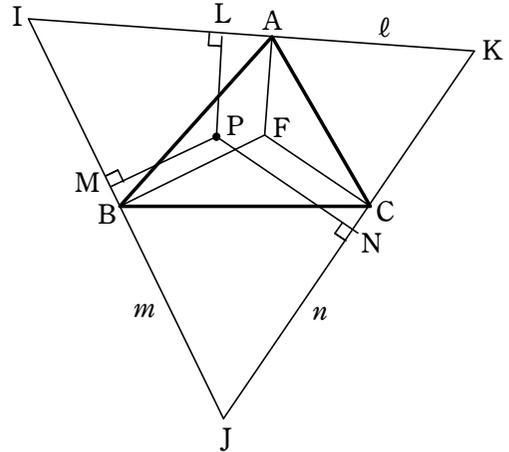
$$PL + PM + PN = FA + FB + FC$$

ここで  $PL \leq PA$  ,  $PM \leq PB$  ,  $PN \leq PC$  であるから

$$PL + PM + PN \leq PA + PB + PC$$

したがって  $FA + FB + FC \leq PA + PB + PC$

すなわち、 $P$  が  $F$  に一致するとき  $PA + PB + PC$  が最小となる。 (証明終)



**補題** 正三角形  $IJK$  の内部の点  $P$  と各辺との距離の和  $PL+PM+PN$  は一定である。

**補題の証明** 面積について

$$\begin{aligned} \triangle IJK &= \triangle PKI + \triangle PIJ + \triangle PJK \\ &= \frac{1}{2}(PL \cdot KI + PM \cdot IJ + PN \cdot JK) \\ &= \frac{1}{2}IJ(PL + PM + PN) \end{aligned}$$

$\triangle IJK$  および  $IJ$  が一定であるから、 $PL+PM+PN$  も一定である。 (証明終)