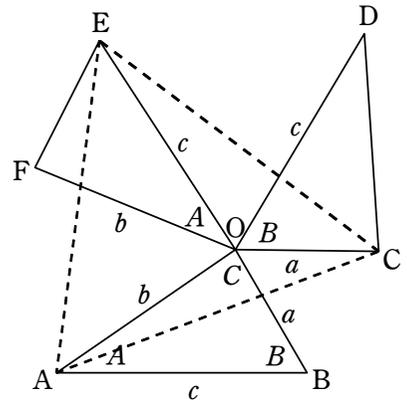


問題 右の図において

$$\triangle OAB \cong \triangle CDO \cong \triangle FOE$$

$$\angle BOC = \angle DOE = \angle FOA$$

である。このとき、 $\triangle ACE$ は正三角形であることを証明せよ。



証明 $\triangle OAC$ において、余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} AC^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(C + 60^\circ) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \left(\frac{1}{2} \cos C - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C \right) \end{aligned}$$

ここで、 $\triangle OAB$ の面積を S とすると $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ であり、また $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ をもちいると

$$\begin{aligned} AC^2 &= a^2 + b^2 - \frac{1}{2} \cdot 2ab \cos C + 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} ab \sin C \\ &= a^2 + b^2 - \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2) + 2\sqrt{3} S \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3} S \end{aligned}$$

CE^2 、 EA^2 についても同じ式が得られる。したがって

$$AC = CE = EA$$

(証明終)