

問題 $\triangle ABC$ の各辺の外側に 3 つの正三角形 $BA'C$, $CB'A$, $AC'B$ をつくり, それらの重心をそれぞれ L , M , N とする。このとき $\triangle LMN$ も正三角形であることを証明せよ。

証明 複素数平面上で点を表す複素数を $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $A'(\alpha')$, $B'(\beta')$, $C'(\gamma')$, $L(\lambda)$, $M(\mu)$, $N(\nu)$ とする。

また, $\frac{\pi}{3}$ の回転を表す複素数を w とすると

$$w = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$w^3 = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \quad \text{から} \quad (w+1)(w^2-w+1) = 0$$

$$w+1 \neq 0 \quad \text{であるから} \quad w^2-w+1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle BA'C$ について, A' は B を C の周りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転

した点であるから

$$\frac{\alpha' - \gamma}{\beta - \gamma} = w \quad \text{よって} \quad \alpha' = w\beta + (1-w)\gamma$$

$$\lambda = \frac{\alpha' + \beta + \gamma}{3} = \frac{1}{3}\{(1+w)\beta + (2-w)\gamma\}$$

$\triangle CB'A$, $\triangle AC'B$ についても同様にして

$$\mu = \frac{1}{3}\{(1+w)\gamma + (2-w)\alpha\}, \quad \nu = \frac{1}{3}\{(1+w)\alpha + (2-w)\beta\}$$

これらから

$$\mu - \lambda = \frac{1}{3}\{(2-w)\alpha + (-1-w)\beta + (-1+2w)\gamma\} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\nu - \lambda = \frac{1}{3}\{(1+w)\alpha + (1-2w)\beta + (-2+w)\gamma\} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②, ③ の α , β , γ の係数について ① を用いると,

$$(2-w)w = 2w - w^2 = 2w - (w-1) = 1+w,$$

$$(-1-w)w = -w - w^2 = 1-2w, \quad (-1+2w)w = -w + 2w^2 = -2+w$$

したがって

$$\nu - \lambda = \frac{1}{3}\{(2-w)w\alpha + (-1-w)w\beta + (-1+2w)w\gamma\}$$

$$= \frac{1}{3}\{(2-w)\alpha + (-1-w)\beta + (-1+2w)\gamma\}w = (\mu - \lambda)w$$

すなわち $\frac{\nu - \lambda}{\mu - \lambda} = w$

これは N が, M を L の周りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であることを示している。

ゆえに $\triangle LMN$ は正三角形である。

(証明終)

