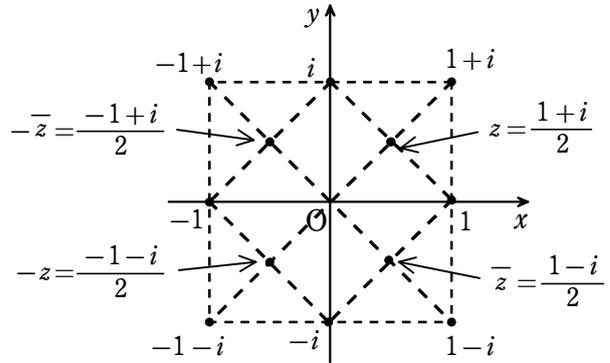
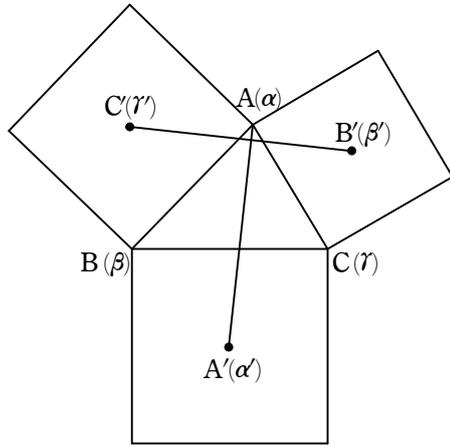


3つの正方形

三角形 ABC の辺 BC, CA, AB をそれぞれの一边とする 3 つの正方形を図のように作り、正方形の中心を A', B', C' とする。このとき AA'=C'B', AA'⊥C'B' が成り立つ。



証明 点を表す複素数を $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $A'(\alpha')$, $B'(\beta')$, $C'(\gamma')$ とする。原点の周りで $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に

拡大する操作を表す複素数を z とすると

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1+i}{2} \quad \text{また} \quad 1-z = \frac{1-i}{2} = \bar{z}$$

A' は B を C の周りで $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に拡大した点だから

$$\frac{\alpha' - \gamma}{\beta - \gamma} = z \quad \text{よって} \quad \alpha' = \gamma + (\beta - \gamma)z = \beta z + \gamma \bar{z}$$

同様にして $\beta' = \gamma z + \alpha \bar{z}$, $\gamma' = \alpha z + \beta \bar{z}$

$\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{C'B'}$ を表す複素数はそれぞれ

$$\alpha' - \alpha = -\alpha + \beta z + \gamma \bar{z}, \quad \beta' - \gamma' = (\gamma z + \alpha \bar{z}) - (\alpha z + \beta \bar{z}) = -\alpha i - \beta \bar{z} + \gamma z$$

$$zi = -\bar{z}, \quad \bar{z}i = z \quad \text{であるから} \quad \frac{\beta' - \gamma'}{\alpha' - \alpha} = i$$

すなわち $\overrightarrow{AA'}$ を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したものが $\overrightarrow{C'B'}$ であるから、 $AA' = C'B'$, $AA' \perp C'B'$ が成り立つ。(証明終)

同様にして、 $BB' = A'C'$, $BB' \perp A'C'$ および $CC' = B'A'$, $CC' \perp B'A'$ が成り立つ。A'A, B'B, C'C は三角形 A'B'C' の頂点から各対辺にひいた垂線だから 1 点で交わり、その交点は三角形 A'B'C' の垂心である。

