座標を用いた証明

B を原点 (0,0) とし、辺 BC、BA にそってそれぞれ x 軸、y 軸をとる。 頂点の座標を A (0,2)、C (2,0)、D (2,2) とする。(証明の一般性は失われない) また、AB の

A(0, 2)

O|B

M(0, 1)

 $\theta \sqrt{}$

中点を M(0, 1) とし、 $\angle PMA = \theta$ とおく。 すると、P は A を M の周りに θ だけ回転 した点であるから、

$$P \mathcal{O} x$$
座標は $0 + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$

$$P \mathcal{O} y$$
 座標は $1+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=1+\cos\theta$

簡単のために $s=\sin\theta$, $c=\cos\theta$ と表すことにすると

$$P(-s, 1+c)$$

同様にして

$$Q(1-c, 2-s), R(1+c, s), S(2+s, 1-c)$$

これらから

$$\overrightarrow{PQ} = (1+s-c, 1-s-c), \overrightarrow{PR} = (1+s+c, -1+s-c), \overrightarrow{PS} = (2+2s, -2c)$$

 \overrightarrow{PQ} と \overrightarrow{PR} の x, y 成分の比はそれぞれ

$$\begin{split} &\frac{1+s+c}{1+s-c} = \frac{(1+s+c)\,(1-s+c)}{(1+s-c)\,(1-s+c)} = \frac{(1+c)^2-s^2}{1^2-(s-c)^2} = \frac{2c+2c^2}{2sc} = \frac{1+c}{s} \\ &\frac{-1+s-c}{1-s-c} = \frac{(-1+s-c)\,(1+s+c)}{(1-s-c)\,(1+s+c)} = \frac{-(1+c)^2+s^2}{1^2-(s+c)^2} = \frac{-2c-2c^2}{-2sc} = \frac{1+c}{s} \\ & \text{\sharp or } \overrightarrow{PR} = \frac{1+c}{s} \overrightarrow{PQ} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{split}$$

 \overrightarrow{PQ} と \overrightarrow{PS} の x, y 成分の比はそれぞれ

$$\frac{2+2s}{1+s-c} = \frac{(2+2s)(1-s+c)}{(1+s-c)(1-s+c)} = \frac{2\{(1-s^2)+(1+s)c\}}{2sc} = \frac{1+s+c}{s}$$

$$\frac{-2c}{1-s-c} = \frac{-2c(1+s+c)}{(1-s-c)(1+s+c)} = \frac{-2c(1+s+c)}{-2sc} = \frac{1+s+c}{s}$$

$$\sharp \circ \tau \quad \overrightarrow{PS} = \frac{1+s+c}{s} \overrightarrow{PQ} \quad \cdots \cdot \textcircled{2}$$

 \overrightarrow{PR} , \overrightarrow{PS} はともに \overrightarrow{PQ} の実数倍であるから、4 点 P, Q, R, S は 1 直線上にある。

(証明終)

D(2, 2)

C(2, 0)