

定理 四角形 ABCD が円に外接するための必要十分条件は

$$AB+CD=BC+DA$$

証明 四角形 ABCD が円に外接するとき、辺 AB, BC, CD, DA 上の接点をそれぞれ K, L, M, N とする。

$$AK=AN, BK=BL, CM=CL, DM=DN$$

であるから

$$\begin{aligned} AB+CD &= AK+BK+CM+DM \\ &= AN+BL+CL+DN=BC+DA \end{aligned}$$

となる。

逆に、 $AB+CD=BC+DA$ であるとする。

4 辺の長さがすべて等しいとき、四角形 ABCD はひし形となり明らかに円に外接する。

長さが異なる辺がある場合、 $AB < BC$ として一般性を失わない。

BC 上に $BP=BA$ となる点 P をとり、CD 上に $CQ=CP$ となる点 Q をとると

$$\begin{aligned} DQ &= CD - CQ = (BC + DA - AB) - CQ \\ &= DA + BC - BP - PC = DA \end{aligned}$$

となる。 $\angle B, \angle C, \angle D$ の二等分線は、それぞれ AP, PQ, QA の垂直二等分線であり、 $\triangle APQ$ の外心 O で交わる。

O は AB, BC, CD, DA から等距離にあるから、O を中心とする円はこの 4 辺に接する。 (証明終)

