

例題1 四角形 ABCD が円 I に外接し、辺 AB, BC, CD, DA と円 I との接点をそれぞれ K, L, M, N とするとき、4 つの線分 AC, BD, KM, LN は 1 点で交わることを証明せよ。

証明 点 C を通って AB, AD に平行な直線をひき、
KM, LN との交点をそれぞれ K', N' とする。

$$\angle CK'M = \angle AKM = \angle DMK = \angle CMK'$$

$$\text{よって } CK' = CM \quad \dots\dots ①$$

同様に $\angle CN'L = \angle DNL = \angle CLN'$

$$\text{よって } CN' = CL \quad \dots\dots ②$$

KM, LN と AC との交点をそれぞれ P, P' とすると、

$$\triangle APK \sim \triangle CPK' \text{ と } ① \text{ より } AP : PC = AK : CK' = AK : CM \quad \dots\dots ③$$

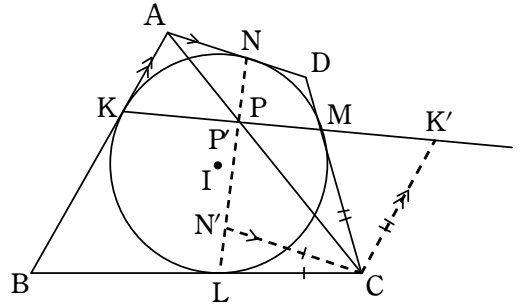
$$\triangle AP'N \sim \triangle CP'N' \text{ と } ② \text{ より } AP' : P'C = AN : CN' = AN : CL \quad \dots\dots ④$$

ここで、 $AK = AN, CM = CL$ であるから、③、④より

$$AP : PC = AP' : P'C$$

したがって、P, P' は一致し、AC, KM, LN は 1 点で交わる。

BD と KM, LN についても同様にして 1 点で交わる。以上のことから、4 つの線分 AC, BD, KM, LN は 1 点で交わる。 (証明終)



例題2 四角形 ABCD が円 I に外接するならば、対角線 BD, AC の中点 M, N と I は 1 直線上にあることを証明せよ。

証明 BD の中点を M と I を通る直線が AC と交わる点を N' とし、N' が AC の中点となることを示す。

$$\begin{aligned} \triangle AMI &= \triangle AMD + \triangle IDM - \triangle IDA \\ &= \frac{1}{2} \triangle ABD + \triangle IBM - \triangle IDA \end{aligned}$$

四角形 ABCD の面積を S とおく。

I と 4 辺 AB, BC, CD, CA との距離は等しく

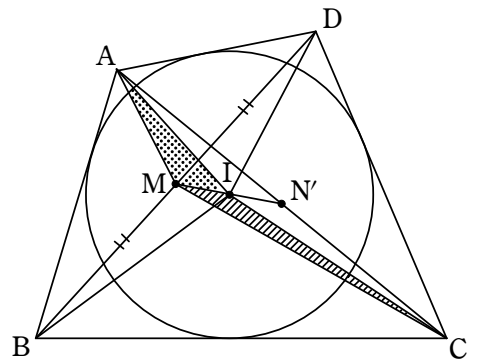
$$AB + CD = BC + DA$$

であるから $\triangle IAB + \triangle ICD = \triangle IBC + \triangle IDA = \frac{1}{2} S$ よって

$$\begin{aligned} \triangle AMI &= \frac{1}{2} (S - \triangle DBC) + \triangle IBM - \left(\frac{1}{2} S - \triangle IBC \right) \\ &= \triangle IBM + \triangle IBC - \frac{1}{2} \triangle DBC \\ &= \triangle IBM + \triangle IBC - \triangle MBC = \triangle CMI \end{aligned}$$

ゆえに N' は AC の中点となる。すなわち、M, N, I は 1 直線上にある。

(証明終)



例題3 四角形 ABCD が円 I に外接し、辺 AB, BC, CD, DA と円 I との接点をそれぞれ K, L, M, N とする。円 I の半径を r , $AK=AN=a$, $BL=BK=b$, $CM=CL=c$, $DN=DM=d$ とするとき

$$r^2 = \frac{bcd + acd + abd + abc}{a + b + c + d}$$

が成り立つことを示せ。

解 $\angle IAK = \angle IAN = \alpha$, $\angle IBL = \angle IBK = \beta$,
 $\angle ICM = \angle ICL = \gamma$, $\angle IDN = \angle IDM = \delta$ とおくと
 四角形の内角の和が 2π であるから

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(\pi - \gamma - \delta) = -\tan(\gamma + \delta)$$

ゆえに
$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -\frac{\tan \gamma + \tan \delta}{1 - \tan \gamma \tan \delta}$$

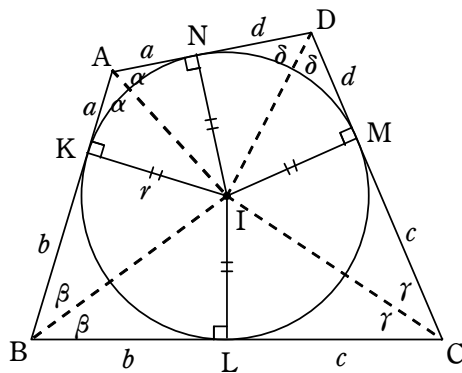
また $r = a \tan \alpha = b \tan \beta = c \tan \gamma = d \tan \delta$ であるから

$$\frac{\frac{r}{a} + \frac{r}{b}}{1 - \frac{r}{a} \cdot \frac{r}{b}} = -\frac{\frac{r}{c} + \frac{r}{d}}{1 - \frac{r}{c} \cdot \frac{r}{d}} \quad \text{から} \quad \frac{(a+b)r}{ab-r^2} = -\frac{(c+d)r}{cd-r^2}$$

$$(a+b)(cd-r^2) = -(c+d)(ab-r^2)$$

$$(a+b+c+d)r^2 = (a+b)cd + ab(c+d)$$

ゆえに
$$r^2 = \frac{bcd + acd + abd + abc}{a + b + c + d}$$



参考 三角形の内接円については

$$r^2 = \frac{abc}{a + b + c}$$

が成り立つ。

