

## 極・極線と調和点列

円  $O$  の外部の点  $A$  から接線をひき、その接点を  $B, C$  とする。また、線分  $BC$  上に点  $D$  をとり、直線  $AD$  と円  $O$  との交点を  $P, Q$  とする。このとき、 $P, Q$  は線分  $AD$  を同じ比に内分および外分する。(4点  $A, P, D, Q$  を調和点列という) また、

$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ} = \frac{2}{AD}$$

が成り立つ。

[証明]

線分  $AD$  を内分する点を  $P$ 、同じ比に外分する点を  $Q$  とすると

$$AP : PD = AQ : QD \quad \text{すなわち} \quad \frac{PD}{AP} = \frac{QD}{AQ}$$

$$\frac{AD - AP}{AP} = \frac{AQ - AD}{AQ} \quad \text{より} \quad \frac{AD}{AP} - 1 = 1 - \frac{AD}{AQ}$$

$$\frac{AD}{AP} + \frac{AD}{AQ} = 2 \quad \text{よって} \quad \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ} = \frac{2}{AD} \quad \dots\dots ①$$

① の分母を払うと

$$AD \cdot (AP + AQ) = 2AP \cdot AD \quad \dots\dots ②$$

これを証明する。

線分  $BC$  と  $AO$  の交点を  $E$ 、線分  $PQ$  の中点を  $M$  とすると

$$\angle AEB = 90^\circ, \quad \angle AMO = 90^\circ$$

である。 $\triangle AED \sim \triangle AMO$  また  $\triangle AEB \sim \triangle ABO$  であるから

$$AE : AM = AD : AO, \quad AE : AB = AB : AO$$

よって  $AD \cdot AM = AE \cdot AO = AB^2$

方べきの定理により  $AB^2 = AP \cdot AQ$ 、また  $AM = \frac{AP + AQ}{2}$  であるから

$$AD \cdot \frac{AP + AQ}{2} = AP \cdot AQ$$

したがって  $AD \cdot (AP + AQ) = 2AP \cdot AD$

(証明終)

