

極・極線と調和点列

円 O の外部の点 A から接線をひき、その接点を B, C とする。また、線分 BC 上に点 D をとり、直線 AD と円 O との交点を P, Q とする。このとき、 P, Q は線分 AD を同じ比に内分および外分する。(4点 A, P, D, Q を調和点列という) また、

$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ} = \frac{2}{AD}$$

が成り立つ。

[証明]

線分 AD を内分する点を P 、同じ比に外分する点を Q とすると

$$AP : PD = AQ : QD \quad \text{すなわち} \quad \frac{PD}{AP} = \frac{QD}{AQ}$$

$$\frac{AD - AP}{AP} = \frac{AQ - AD}{AQ} \quad \text{より} \quad \frac{AD}{AP} - 1 = 1 - \frac{AD}{AQ}$$

$$\frac{AD}{AP} + \frac{AD}{AQ} = 2 \quad \text{よって} \quad \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ} = \frac{2}{AD} \quad \dots\dots ①$$

① の分母を払うと

$$AD \cdot (AP + AQ) = 2AP \cdot AD \quad \dots\dots ②$$

これを証明する。

線分 BC と AO の交点を E 、線分 PQ の中点を M とすると

$$\angle AEB = 90^\circ, \quad \angle AMO = 90^\circ$$

である。 $\triangle AED \sim \triangle AMO$ また $\triangle AEB \sim \triangle ABO$ であるから

$$AE : AM = AD : AO, \quad AE : AB = AB : AO$$

よって $AD \cdot AM = AE \cdot AO = AB^2$

方べきの定理により $AB^2 = AP \cdot AQ$ 、また $AM = \frac{AP + AQ}{2}$ であるから

$$AD \cdot \frac{AP + AQ}{2} = AP \cdot AQ$$

したがって $AD \cdot (AP + AQ) = 2AP \cdot AD$

(証明終)

